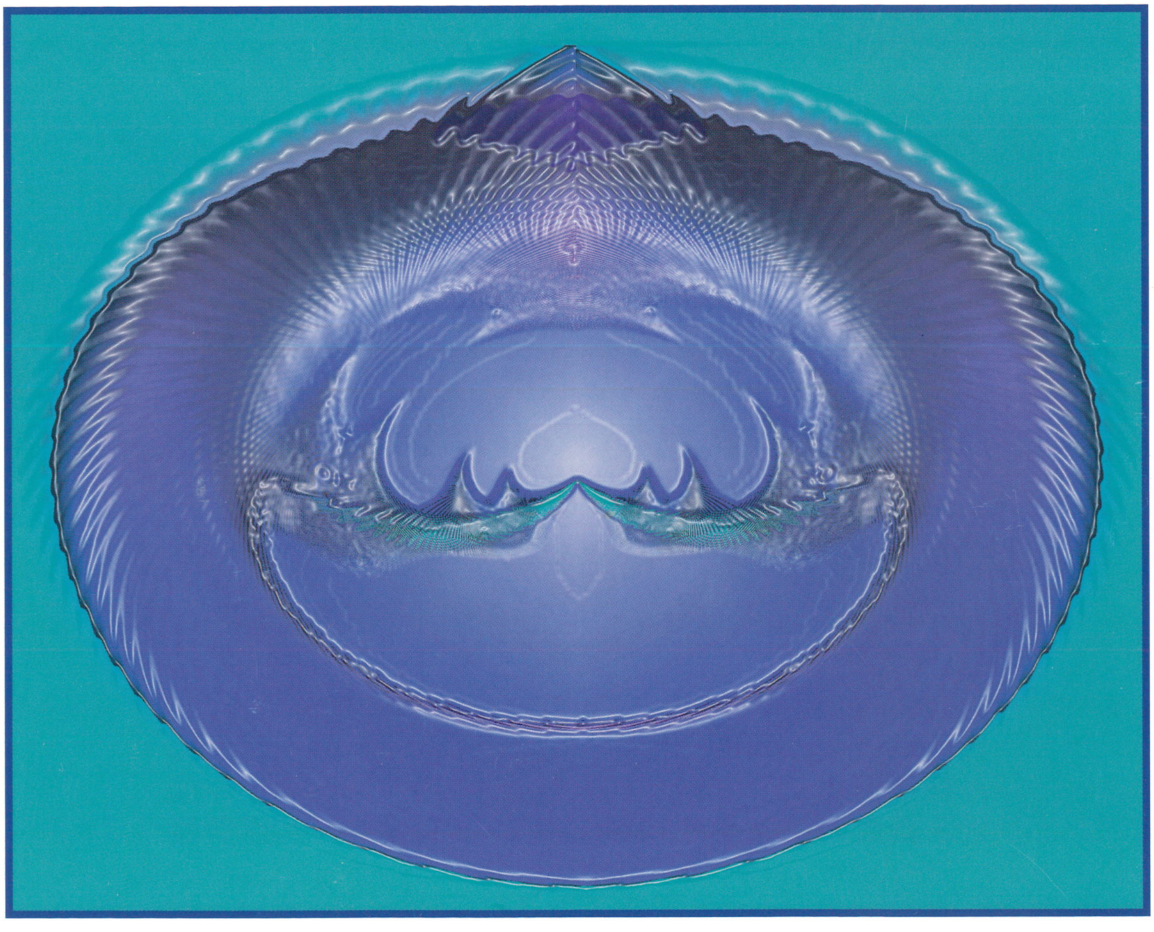
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2011年7月1日発行　第49巻7号　毎月1回1日発行
ISSN 0386―2240

数理科学

7
2011

特集

〈隠れた〉物理法則
自然界の真相を探る



No.577
サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 577 July 2011

〈隠れた〉物理法則

自然界の真相を探る

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は1年間（本誌のみ）11,000円，半年間（本誌のみ）5,500円．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63年/7～2008年/5 省略

2008年/6 線形代数の力
/7 物理的思考法のすすめ
/8 数の魅力
/9 トポロジカルな弦の世界
/10 ポアンカレ
別冊 対称性と保存則
/11 物理と論理
/12 確率論的物理観

2009年/1 グラフィックでわかる物理
/2 発展する量子力学
/3 方程式に潜む対称性
/4 現代数学はいかに使われているか［幾何編］
別冊 代数学の魅力
/5 微積分を楽しむ
/6 現象と物理概念を結ぶ方程式
/7 現代物理の世界像
/8 複素数
/9 シュレーディンガー
/10 数学と物理に広がる不変量
別冊 量子重力理論
/11 可積分系の世界
/12《原理》の探求

2010年/1 無限次元の魅力
/2 数学の可視化
/3 物理数学の効用
/4 現代数学はいかに使われているか［確率編］
別冊 現代幾何学の発展
/5 物理学事始め
/6 現代幾何と方程式
/7 物理学と行列
/8 力の統一にむけて
/9 南部陽一郎
/10 曲面の不思議
/11 連続から離散へ
/12 物理における《破れ》と調和

2011年/1 数論の探求
/2 物理現象を読み解く数学的手法
/3 方程式と現代代数学
/4 物理学と多様体
/5 初学者を悩ます数理の概念
/6 物理イメージと数式表現

数理科学臨時別冊一覧

10年/6 非線形現象と微分方程式
10年/7 数物系のための圏論
10年/9 超弦理論を学ぶための場の量子論
10年/10 重点解説 ジョルダン標準形
10年/11 重点解説 ベクトル・テンソル
10年/12 行列解析の基礎
11年/1 超弦理論の基礎
11年/3 繰りこみ群の物理と数理
11年/4 超重力理論
11年/6 共形場理論

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
書泉ブックタワー（秋葉原）
三省堂本店（神田）
リブロ池袋店
ジュンク堂書店（池袋）
ジュンク堂書店（新宿）
芳林堂（高田馬場）
MARUZEN & ジュンク堂渋谷店
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
丸善日本橋店
ブックファースト青葉台店（横浜）
有隣堂イセザキ町本店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
ジュンク堂書店（盛岡）
ジュンク堂書店（新潟）
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
旭屋本店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂書店（京都）
ジュンク堂京都BAL店
ジュンク堂書店（神戸）
ジュンク堂三宮駅前店（神戸）
ジュンク堂書店（大分）
喜久屋書店倉敷店
MARUZEN & ジュンク堂広島店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
ジュンク堂鹿児島店
紀伊國屋書店新潟店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂書店（仙台）
ジュンク堂書店（秋田）
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

――大学生協・売店――

東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店
熊本大学
名古屋大学
広島大学（北1店）
九州大学（理系）

July 2011 MATHEMATICAL SCIENCES Number 577

特集／〈隠れた〉物理法則

巻頭言

白水 徹也

1. はじめに

物理学の進歩は「隠れた」物理法則の発見と切っては離せない．手短なところで中学・高校でも学ぶ力学を例にとってみよう．教科書には枚数の制約もあるのであろうが，ニュートンの法則がさらりと書かれている．これらの法則も最初は「隠れた」ものであった．私が子供の頃にはこれらの法則が存在することに感動を覚え，そしてその法則を思いついた科学者に憧れを抱いたものである．例えば，慣性の法則（外力が働かない系は静止しているか等速運動を続ける）などどうして気がついたのだろうかと思う．力が働かない系をどうやって想像したらよいものか！？ しかしこのような発見の偉大さは誰もが認めているところであるものの，実験や観測が進むとそれらにほころびがあることに気がつく．例えば，対象とする系の速さが光の速さに近づくと，ニュートンの力学は破綻し特殊相対論に置き換わる．光の速さよりも小さい場合には，特殊相対論から近似的にニュートン力学が再現される．これらの教訓から，「隠れた」，「真相」とは何か少し考えさせられることになる．得られた真相は時限付きの可能性があるのである．しかし，古い「真相」が必ずしも間違いではない．ある近似下では正しいのである．

2. 「隠れた」物理学の魅力

「隠れた」というフレーズは若い読者をきっと魅了するであろう．秘宝探しに似ているかもしれない．また「隠れた」という表現は，秘宝の存在を前提としたニュアンスがあると感じれば安心感もあり，秘宝探しに没頭できそうである．では実際の物理法則探しはどうだろうか．「秘宝」は必ずあるのであろうか．答えはYesでもありNoでもあろう．一見答えがない場合でもあきらめる必要はない．探し方が悪いだけである．現場で言われる一言は「問題設定が悪い」である．視点を変えることで突破口は見えてくるかもしれない．しかし，それらに気がつくためには，センス，忍耐力，柔軟性，楽観主義などが重要になってくるだろう．本特集を読んでいただけばわかるが，まだまだ「隠れた」物理法則は山ほどある．若い読者が果敢に挑んでほしいと思う．

3. 隠れた世界の住人を体験する

さて実は今回の執筆中に怪我で一カ月ほど入院することとなり，最初の2週間寝たきりの状態を体験することとなった．大まかには高さ方向と左

側の自由度がその間失われた．そこで「隠れた」世界の住人の体験をすることができた（と思う）．この低次元系を如何に快適に過ごすか，最適化を試み実行した．与えられた移動式の狭いテーブルに食事，歯磨き，お茶，図書などを優先順位を考慮しながら所狭しと並べた．この配列は私の限られた自由度から生成された極めて「美しい」ものであった．しかし，平穏で満ち足りたこの楽園はいとも簡単に何度も崩れかけた．定期的にしかも頻繁にやってくる看護師さんが食事を用意してくれたりすると，親切ではあるものの「美しい」配列が一挙に崩されることが多々あった．見えている世界が違うのだ！ しかし，私の「世界」に気がつく看護師さんもいた．私のあの「世界」は，多くの人にとっては「隠れた」ものであったが，それを認識できる人もいたのである．その差は何だろうか．「隠れた」物理法則を発見することに共通するセンスが問われているかもしれない．なお，図書の一つとしてサイエンス社から献本として頂いた今村洋介著『超弦理論の基礎』を持ち込んだが，退屈な時間を有効に過ごすのに最適であった．また，きめ細やかな心のこもった看護をしてくださった看護師さん一同と，フレンドリーな二人の主治医に深く感謝している．

4. 勝手にダイジェスト

本特集では「隠れた」物理法則に迫る一端を紹介するのが目的である．最期に各記事の概要についてまとめておこう．一部私見も入っているが各著者に責任はない．

物理学の対称性の様々な側面

物理学において，近似的にも対称性の存在を見抜くことが一つのアプローチとなっている．対称性から自然界に存在し得る素粒子の種類までもが決まってしまう．また，その系を支配する方程式もある程度決まってしまう．驚くべき対称性の威力である．様々な対称性については藤川さんの記事を読まれたし．本特集の他の記事で登場する対称性の含蓄ある概論となっている．さらに興味が沸いた読者は藤川さんご自身による著書『ゲージ場の理論』をおすすめする．

隠れた定数

現在の宇宙の観測に従えば，宇宙は加速膨張していることが分かっている．時空がアインシュタイン方程式によって記述されているとすると，ダークエネルギーと呼ばれる謎の「物質」の存在を加速膨張は示唆している．一方で，時空を記述する理論の変更を迫る考察も活発になされている．現段階では指導原理不在のせいかこの種の研究は海とも山とも言えない有様であるが，何を言われても努力は続けていくべきであろう．継続は力となる．詳しくは辻川さんの記事を読まれたし．

隠された粒子と物質

光と相互作用の弱い物質であるところのダークマターの正体は宇宙や素粒子の謎として長く君臨しているため，その存在は科学に関心のある読者には馴染み深い話題かもしれない．このダークマターの候補の一つが超対称粒子であるが，現在稼働中の大型ハドロン衝突加速器実験（LHC）でその存在の有無が明らかになれば，ダークマター研究にも大きな発展が必ずあるであろう．これからの数年が非常に楽しみである．素粒子論的宇宙論の大家である川崎さんの記事は堅実で安心して楽しんで読めることと思う．とてもいい時代である．

隠れた次元

次元とは何か考えせられる橋本さんの記事となっている．高校物理/入試問題を例にとりながら，隠れた次元の世界に誘う．超弦理論は高次元時空（10次元）で定式化されている．私たちの日頃お世話になっている時空は4次元であるから，余分な次元は日常では隠されている必要がある．しかし，ある種の高次元時空の古典重力理論が4次元上の場の理論と等価である可能性が指摘された．乱暴な言い方をすれば，私たちの4次元の世界は高次元時空で記述するのと同じというわけである．どちらでもいいのである．次元とは一体なんだろうか．橋本さんの記事を是非読んで考えていただきたい．

隠れていた場

ゴースト場はもともとゲージ場のある量子化の手法で便宜上導入され，運動エネルギーの項が普通の場合と逆の特徴を持つ．本記事のゴースト場はより積極的に時空構造に関わるものとして導入される．ローレンツ対称性の自発的破れによって大きなスケールで時間方向の対称性を理論が破るようにうまく仕組む．そして，ダークエネルギー，ダークマター，インフレーションを説明する．対称性を絡めている点がこの模型の魅力であるため，辻川さんのダークエネルギー総括部分とは分けた．向山さん自身の研究が内容のメインとなっている．ゴースト場の想定外の活躍を楽しんでいただけたらと思う．

隠れた変数

量子力学は不思議である．電子は粒子であり波動でもあると学ぶ．有名な例として電子の干渉実験があげられるであろう．二重スリットに電子を照射し後方のスクリーンで電子を観測するのである．スクリーンに到達した電子一つ一つは確かに粒子である．数が少ないうちは一見ランダムに電子が飛んできているように見えるが，数を増やしていくと干渉縞が見えるのである．粒子だと思うと，スリットのいずれかを通ってきてるはずだと思いたくなるが，それを測定すると干渉縞は消えてしまう．この不思議さゆえに量子力学の解釈に満足しなかったアインシュタインの批判から始まり，量子情報へと続く壮大な井元さんの綴るストーリーである．

隠れた秩序

スピングラスと呼ばれる状態になり得る磁性体における隠れた秩序に関する話である．川村さんご自身による提案された仮説である．現時点でもその仮説が吟味されている段階であるため，典型的なボトムアップ的な研究の臨場感溢れる記事となっている．磁性体は電子のスピンの挙動で理解される．スピングラスとは電子のスピンの向きが空間的にランダムであるが，時間的に変化のない状態として記述されている．仮説ではさらに踏み込んで右手系と左手系を区別するカイラリティーが系の変化を特徴付ける秩序変数であることを主張する．この真相を明らかにするため，理論・実験双方からの努力が描かれている．門外漢にも現場を直接見てみたいと思わせる記事となっている．

隠れた位相

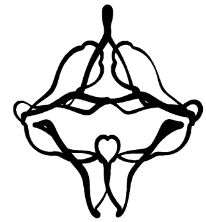
広い意味でのホール効果があるような系における量子力学的効果を考察する際に登場するベリー曲率の話である．例えば，電子が主役の系において，伝導率は（ブロッホ）波動関数の位相を起源とするある種のゲージ場の強さ（磁場の類似物）によって評価される．具体的には電子の電荷 e とプランク定数 h を用いて $e^2/h \times$ (整数) と書ける．整数は系の状態のある種のトポロジーによって決まる．異なる系でも同じ機構で支配される法則が見つかっている普遍的な現象である．読み進めるには固体物理の知識がすこし必要になるが，読み流しても雰囲気は伝わるようにうまく構成されている村上さんの記事である．

〈隠れた〉物理繁盛？

私の大学院の指導教官の佐藤文隆さんの文章はいつ読んでも面白い．本人をご存知の方は独特の笑い方と肉声が聞こえてくるのではないだろうか．私の文は「お子様」向けであり，彼のそれは「大人」向けである．新たな物理法則の発見の前後には，常にその前に台頭していた理論の防御帯が敷かれる．しかし，それはとても自然のことのようにも思う．新しい発見と認定するためには，前理論においてあらゆる可能性を追求し，余りあることを慎重に吟味する必要がある．このような地道な「努力」は，〈隠れて〉しまうかもしれない．しかし，大切なステップである．

（しろみず・てつや，京都大学大学院理学研究科）

物理学の対称性の様々な側面



藤川　和男

1. はじめに

物理法則を支配する対称性を俯瞰するというのが与えられた課題である．物理学における対称性という概念自体が非常に広い概念である．まず巨視的な物理に現れる対称性もあれば微視的な現象に現れる対称性がある．もちろん，微視的な現象から巨視的な現象まで階層を貫いた普遍的な対称性といったものもある．さらに，厳密に成立するいわゆる対称性という考えからは自然なものから，近似的な対称性という概念もある．物理学では，近似的な対称性が重要度が低いというようなものではない．また，出発点となる微視的な理論では見えないが，多数の粒子の集合体での複雑な相互作用の結果として初めて創発されるような性質とか対称性といったものもある．さらに，隠れた対称性という概念まで広げれば，何が対称性なのか定義自身も必ずしも自明ではなくなる．さらに，現在物理学で考えている対称性は全体のごく微小な一部であって将来発見されるかもしれない対称性のほうがより基本的であり包括的であるのではないかというような疑問も起こり得る．最近の宇宙物理における**ダークマター**とか**ダークエネルギー**という現象は，そのような新しい対称性の存在を期待させるものである．

対称性とかその帰結に関しての評価は，個々の物理学者の美的感覚によっても変化し得る．ディラックは，新しい独創的な理論を提案したときに，このような美しい対称性を自然が用いないはずがないといったと伝えられる．また，シュウィンガーは，現在素粒子の統一模型と呼ばれる考えをごく初期に考察したときに，自然現象を記述する本当に基礎的な法則とか考えは実験から帰納するのではなく自由に発明される必要があるという，アインシュタインに帰せられる標語を用いて論文を書いている．物理学の研究を積めば自然の根底にある法則性とか対称性は直感でわかるようになるということかもしれないが，これは誰にでもできることではないのは明らかである．

2. 4次元時空

物理学の全体の入れ物といえる時空の対称性から始めたい．ガリレオとかニュートンに始まる力学の定式化においては，ユークリッド幾何学以来の空間概念に慣性系という概念を加えて，基礎方程式を定式化した．このときには，時間は抽象的に絶対時間という概念で導入された．目で見ることができる空間に比して，時間は何かは非常に理解しにくい．したがって，20世紀の初頭に至って空間の概念と時間の概念が融合統一されたのは，本当に革命的であり驚きといえる．誰であれ，物理で教えられるまでは，**時間と空間の同一性**を経験的に直感的に思いつくというのはまず不可能と思われる．光の速さはいくら早いロケットに乗って測っても地上で測るのと同じ速さであるという，

光速不変の原理というこれも直感的な理解が難しい実験事実に基づいて，長さとか時計の歩みが物体が止まっているか動いているかによって変化するという結論にいたるのも驚きである．このような直感的に理解が難しい時空という概念を，相当数学的にではあるが，ある程度わかりやすくしたのが**ミンコフスキー空間**という4つの座標（c を光速として）

$$(ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3) \tag{1}$$

で記述される4次元時空間の考えである．この考えでは，空間と時間はほとんど同等に扱われることになる（しかし，量子力学の原理がからまると，負の確率が出ないという条件から時間と空間に再び非常に大きな差が現れることになる）．

このミンコフスキー空間の幾何学的な性質から角運動量の保存とか運動量の保存さらにはエネルギーの保存という概念が定式化された．特殊相対性理論とミンコフスキー空間に関しては，これまでの超高エネルギー加速器とか宇宙線の測定実験等から考えて，基本的なミンコフスキー時空の描像は，少なくとも物理現象に影響を与える程度に破れていると考える理由は見つかっていない．質量とエネルギーの関係式も非常にいい精度で実験的に成立している．微視的な現象における角運動量の保存からいっても，小さな距離での空間の等方性はいまのところ疑いようがないと思われる．少なくとも，物理の理論を考えるときには，まず特殊相対性理論とミンコフスキー空間が正しいとして出発するのが自然であると思われる．

3. 鏡に映して見る

このミンコフスキー空間を少し巨視的に見たときには，時間軸を逆転させるとか，この世界を鏡に映してみるという変換が考えられる．重力理論とか電磁気学の基礎方程式は，これらの変換で基本的な内容は変わらないということはよく知られていた．したがって，この対称性は我々が住む世界が持つ基本的な対称性と考えてよいのではないかというのが常識となっていた．ところが，鏡に映してみるという変換は，素粒子の間に働く**弱い相互作用**という力が関与する現象では壊れている可能性が，実験データの詳細な分析からリーとヤンの二人の研究者により指摘された．このことは，直ちに実験的に疑いなく検証された．すなわち，現実世界では右利きと左利きは本質的に違うということがわかった．素粒子の言葉でいうと，ニュートリノは左巻きでその反粒子の反ニュートリノは常に右巻きであることがわかった．右巻きのニュートリノはこの世界では存在しないということになった．鏡に映すと左巻きのものが右巻きに見えるので，一般に鏡の中の世界はこの世界では実現できないことになる．この**パリティの破れ**と呼ばれる発見は1956年から57年に行われ，我々の時空に対する考えに大きな影響を与えた．

この鏡の中を見るという考察は，これに終わらずさらに重要な第2幕があった．上の説明からもわかるように，ニュートリノを鏡に映すと右巻きに見えるが，同時にニュートリノをその反粒子である反ニュートリノに置き換えて考えると，鏡の中の反ニュートリノは左巻きに見える．このことから，この世界のニュートリノと鏡の中の反ニュートリノを比べることにすればすべてが対称にできているのではないかという提案が現れた．これは，現在の場の量子論では本質的に時間軸の反転と結びついており（より正確にはCP変換），したがってパリティは破れているがCPという変換に焼きなおすとその対称性は破れていないのではないかという提案がされた．しかし，実験的にはこの提案もうまくいかないことが示された．この**小さなCPの破れ**の基本的な機構は長らく謎であったが，素粒子の標準理論の枠組みの中にそれを説明する自然な機構が含まれていることが，小林・益川両博士により指摘され，実験的にもKEKとSLACの実験でその整合性が見事に検証された．

現在観測されている宇宙には反物質でできた銀河系といったものが見つかっていない（すなわち，観測される宇宙は物質優勢である）．素朴には，粒子と反粒子の完全な対称性が宇宙の初期条件とし

て与えられると考えるのは自然なことであり，したがって観測されている非対称性は宇宙の進化で生じたとするのが自然である．化学における質量保存則の基礎にあるバリオン数の保存則があるエネルギー領域では破れていること（そのような模型も多く提案されている）に加えて，CP 対称性の破れが存在することが，この物質と反物質の非対称性を膨張宇宙論の枠内で説明するのに必須であることが知られている．微視的な理論における対称性の考察が宇宙規模の大きなスケールの現象に影響を与えるのは興味のあることである．

このように，ミンコフスキー空間を鏡に映すという考えは，我々の時空の理解に多くの情報をもたらした．現在では，鏡に映すと同時に時間軸の向きを反転させ（すなわち過去と未来を入れ替え）同時に粒子と反粒子を入れ替えて考えると，すべての物理法則は形を変えないと考えられている．これは **CPT 定理**と呼ばれている．この定理の意味するところは，粒子と反粒子の質量とか寿命がすべて厳密に一致するということである．ここで，鏡に映すのと時間軸を反転させるのは明らかにミンコフスキー空間の幾何学的な考察とつながっているが，どうして反粒子が現れるのかという疑問をもたれるかも知れない．これには量子力学の本質が関与している．例えば，**ファインマンの経路積分**で考えれば，反粒子は時間軸の負の方向に走る負のエネルギーを持つ粒子として理解される．このことから時間軸の方向を変えることは，本質的な意味で粒子を反粒子に読み替えることに関係していることが分かる．

4. 一般座標変換

特殊相対性理論とローレンツ対称性に加えて，破れてほしくない対称性に**一般相対性理論**の基礎にある一般座標変換に関する不変性がある．よく知られているように，ニュートンの運動方程式は**慣性系**という概念に基礎をおいている．慣性系とは止まっている物体は止まり続ける系であり，動いている物体はそのまま動き続ける系である．しかし，地球は太陽の周りを回っているし，太陽系も銀河系の中では動いている．したがって，厳密な意味での慣性系を定義するとか見つけるのは容易ではないし現実的には不可能といえる．この点に関して，一般相対性理論の基礎にある一般座標変換に関する不変性は，満足のできる魅力的な解答を与えている．まず非常に小さな空間領域で短い時間を考えれば，そこではミンコフスキー空間に一致するとして考えてよいという**等価原理**が要請される．この要請により，ガリレオとかニュートンの力学との接点が得られる．次に，物理学の基礎方程式は慣性系に限定されず，すべての任意の座標系で同じ形をとることが要請される．もし**本当に正しい物理法則があったとすれば，それはどのような座標系にいる人でもそれを認識し原理的には発見できる**とするのである．これは，物理学を研究する人にとってはこの上ない朗報といえる．これは数学的には，運動方程式あるいはラグランジャンは座標の任意の変換（これは一般座標変換と呼ばれる）に対して変わらないこと（不変である）として定式化される．一般相対性理論はもちろん実験的に検証されているから多くの人たちがそれを信奉しているわけではあるが，実験的検証に加えて上記のような原理的哲学的な含蓄の深さが，多くの物理学者を魅了している理由と考えられる．ニュートンの**万有引力**は一つのポテンシャル $V(r)$ で記述され，簡単さという意味では 10 個の計量テンソル $g_{\mu\nu}$（4 次元空間の 2 階の対称テンソル）の成分を必要とする一般相対性理論に比して

$$V(r) \leftrightarrow g_{\mu\nu}(t, \vec{x}). \tag{2}$$

と勝っているが，人々は一般相対性理論を採るのは対称性という美しい考察に基づいているからである，というのが A. サラム博士の意見であった．これは現在の電弱統一理論が興味を引き始めた 1970 年代の初頭に，一部の人たちから**ワイバーグ・サラムの理論**のラグランジャンはノートの 1 ページでは収まり切らないといった皮肉とか苦情が出ていた頃に，彼が電弱統一理論を弁護して筆者も出

席していたあるイギリスでの研究会で述べた言葉である．

5. ゲージ対称性

次に，直感的には理解しにくいが重要な対称性としてゲージ対称性が上げられる．これは**マクスウェルの電磁場の方程式**を電場 $\vec{E}$ と磁場 $\vec{B}$ を用いる記述から

$$\vec{E},\ \ \vec{B} \to A_\mu(t,\vec{x}),\ \ \mu = 0,1,2,3 \qquad (3)$$

のように**4個の電磁ポテンシャル** $A_\mu(t,\vec{x})$ という概念を用いて書き換えたときに明確になる対称性であり，量子力学において電磁場と荷電粒子の相互作用を考えるときには $A_\mu(t,\vec{x})$ およびゲージ対称性は必須になる．

まずゲージ対称性が破れたときには何が起こるか考えてみるとその重要性がわかる．電磁場は，そもそも特殊相対性理論を考える基になった理論であり，ローレンツ対称性とも密接に関係している．また，電磁場は質量を持たないために**横波**であることが知られている．すなわち，電磁場の分極（波動関数）は，常に電磁場の進行方向に垂直な方向を向いていることが実験的にも確認されている．あるいは，固有スピンという観点からは，光子のスピンは大きさが1で常に運動方向と同じ方向か逆方向を向いている．もともとは，電磁場は4成分を持つ電磁ポテンシャル $A_\mu(x)$ で記述されるが，これを**ゲージ変換の自由度を用いて1成分減らして**，さらに光子は静止質量がゼロということを用いてさらに1成分減らし，結果として2つの横成分が残り，これが，観測される光の偏極ベクトルの2成分に対応している．すなわち，電磁場が特殊相対性理論の要請を満たすためには4成分持つ必要があり，観測事実と合致するためには測定時には2つの物理的な自由度に減少する必要がある．このことを矛盾なく行うにはゲージ対称性が必須となる．

したがって，もしゲージ対称性が破れているとするとこの2つの重要な観測事実を説明できなくなる．すなわち，特殊相対性理論の要請であるローレンツ変換に関する不変性が失われるか，光子が2つに横波の成分を持つという事実のどちらかが損なわれることになる．

これらは，実験事実と比較したときのゲージ対称性の意味であるが，さらに物質と電磁場の相互作用を考察するときにも非常に重要になる．まず，ゲージ対称性を要請すると，物質と電磁場の結合（すなわち相互作用）の形が非常に制約される．すなわち可能な理論を決める重要な手段を提供する．次に，物質という観点から見たときには，荷電粒子の作り出す電流が保存すること，あるいは電荷の保存則という重要な事実と関係している．さらに対称性という観点からは，**局所的な対称性**という重要な概念を与える（一般相対性理論の一般座標変換も同じく局所ゲージ変換と見なされる）．対称性は変換に関する不変性として定義されるが，これはF. クラインの意味での幾何学の定義に関係し，**物理法則の幾何学的記述**という重要な概念に結びつく．とくに局所的なゲージ変換は，物理学の基本的な要請である因果律，すなわち何かが起これば必ず原因があり，かつ原因が結果に影響を与えることができるのは光の速さで伝わる範囲を越えてはならないという要請との整合性において基本的になる．地上で荷電粒子にゲージ変換を施しても，同じ時間での月の表面の荷電粒子はその影響を受けないという事実を保障するには，この局所的なゲージ変換（あるいは一般には対称性変換）が基本的になる．

このように基本的な対称性があれば一般に局所的な変換に一般化されるのが非常に自然である．この考えを徹底して追及して，導入されたのが**ヤン・ミルズ場**と呼ばれる非アーベル的なゲージ場である．この場は電磁場の自然な拡張になっている．基本的な手順は，まず対称性を数学における群という考えで表現し，その変換群を時空のすべての点で独立に考えることができるという要請をおいて，電磁場の一般化としての非アーベル的なゲージ場を導入するわけである．

このようにして導入されたゲージ場の考えは，

素粒子の基本的な相互作用である電磁相互作用，弱い相互作用それに強い相互作用の**3つの基本的な相互作用**を一部統一化した形で見事に記述していることが明らかになった．これは，素粒子物理学の過去40年あまりの間の最高の成果となっている．

6. ネーターの定理

連続的なパラメターで記述される対称性，例えば，回転対称性に対してはネーターの定理というものが知られている（他方，パリティのような飛び飛びの対称性にはこの定理は適用されない）．この定理の内容は，ある（連続的）対称性があると，必ず保存する**カレント**（電流を一般化したもの）が存在するというものである．すなわち，

$$\partial_\mu j^\mu(x) = \frac{d}{cdt} j^0(x) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(x) = 0 \quad (4)$$

の形の**連続の方程式**を満たすカレント $j^\mu(x)$ が存在し，この式からカレントの時間成分を空間全体で積分して得られる一般化された電荷 Q は時間的に一定である（すなわち，保存する）

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} d^3x j^{(0)}(t, \vec{x}) = \frac{d}{dt} Q = 0 \quad (5)$$

ことが導かれる．例えば，空間の回転に関する不変性に対応する電荷は角運動量に対応し，角運動量の保存則を与える．空間の並進に対する不変性に対応する電荷は運動量に対応し，時間の並進に対する電荷はエネルギーに対応し，それぞれが保存することになる．

ゲージ変換に対応するカレントは，電磁相互作用のときは文字通り電荷の保存則に対応する．ただし，少し技術的な問題になるが，一般の非アーベル的なゲージ変換に関係したカレントは（ゲージ場そのものが一般化された電荷を運び去るという事情で）素朴な意味での保存電荷を生み出さない．この事情は，一般相対性理論のように曲がった時空でのエネルギー保存則が素朴な予想のようにはいかないことと関係している．いずれにしても，非アーベル的ゲージ対称性の場合を除けば，連続的な対称性には保存するカレントと時間に依存しない一般化された電荷が定義されるというのが，ネーターの定理である．

このネーターの定理は，現代的な場の理論で保存則を扱うときの基本になっている．例えば，南部陽一郎先生の指摘された**自発的な対称性の破れ**は，このネーターの定理とエネルギー的に一番安定な真空状態が多粒子的な効果（あるいは高次の量子効果）で，この電荷の保存則を満たさなくなった場合に現れる現象である．すなわち，ネーターの定理はカレントの保存則を主張し，他方具体的に計算した量子力学的なカレントを含む**相関関数**が保存則を満たさない，すなわち，

$$\partial_\mu \langle 0| j^\mu(x) S(y) |0\rangle \neq 0 \quad (6)$$

のときには，両者の整合性から質量0の粒子が j^μ に含まれているというのが，**南部・ゴールドストーンの定理**の内容である．

場の理論では，このような真空状態の定義を通じた自発的な対称性の破れ以外に，**量子異常**（**いわゆるアノマリー**）という量子化の過程で生じる対称性の破れが知られている．この両者はある側面では似たように見える場合もあるが，ネーターの定理に照らし合わせると本質的に違っていることがわかる．すなわち，南部・ゴールドストーンの定理はあくまでもネーターの定理が基本定理として成立する場合に成り立ち，他方量子異常はこのネーターの定理そのものが量子論では成立しなくなる，すなわち，

$$\partial_\mu j^\mu(x) = \mathcal{A}(x) \neq 0 \quad (7)$$

となる場合があるということを示している．この右辺に現れる量 $\mathcal{A}(x)$ が異常項と呼ばれる．したがって，量子異常が現れると南部・ゴールドストーンの定理は成立しなくなる．量子異常の例としては，**素粒子の標準模型ではバリオン数の保存則が破れている**という興味のある性質があげられる．

7. 量子物理

量子論の原理は現代物理学のドグマであり，すべての物理法則の中心に位置している．その正しさは，これまでの実験結果との一致から考えて疑いの余地がないが，最近いわゆる「量子物理」という分野が研究されるようになってきた．これは，これまでの量子論の応用ではともすれば見落とされてきた側面を取り上げて研究する分野である．ここでは，対称性と関係した一部の話題についてコメントしたい．

まず，**アハロノフ・ボーム効果**と呼ばれる現象があげられる．これは数学的には (3) の電磁ポテンシャル $A_\mu(x)$ を用いて

$$\exp\left[\frac{ie}{\hbar}\int_C d\vec{x}\cdot\vec{A}(x)\right] \tag{8}$$

で定義されるいわゆる積分不可能な位相因子 (non-integrable phase factor) を考察することになる．ここで，C は空間内の道を示す．この道 C を閉じたループに選ぶと，ストークスの定理から

$$\exp\left[\frac{ie}{\hbar}\int(\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{S}\right]=\exp\left[\frac{ie}{\hbar}\varPhi\right] \tag{9}$$

となり，$\varPhi$ は閉じたループを貫く磁束を与える．ここで興味深いのは，磁場がループのごく中心部に局在している場合でも，それから遠く離れた道 C にそって運動する電子が位相因子 (8) の影響を受ける点である．これは**電磁場の本質が電磁ポテンシャル**であり電場とか磁場ではないことを示しているが，磁場のない所を運動する電子の位相，すなわちその結果として干渉効果がその影響を受け，見かけ上遠隔力が働いているように見えるのは興味深い．実験的には，外村彰博士の研究がよく知られている．

類似の現象として，量子力学の**断熱近似において現れる Berry の位相**と呼ばれる現象がある．これは正確に計算すれば自動的に含まれているが，断熱近似を用いて計算すると素朴に予想される項に加えて，余分な位相因子が現れるという興味ある現象である．この位相には**ある種のゲージ対称性**（物理現象を変えない自由度）が含まれており，このゲージ対称性の起源としては，**第 2 量子化**で波動関数を演算子 $\hat{\psi}(t,\vec{x})$ と見なして展開する，すなわち，

$$\hat{\psi}(t,\vec{x})=\sum_k \hat{a}_k(t)u_k(t,\vec{x}) \tag{10}$$

とするときに（ここで，$\hat{a}_k(t)$ は演算子である），

$$\begin{aligned}\hat{a}_k(t)&\to e^{i\alpha_k(t)}\hat{a}_k(t),\\ u_k(t,\vec{x})&\to e^{-i\alpha_k(t)}u_k(t,\vec{x})\end{aligned} \tag{11}$$

という置き換えを同時に行うと (10) の $\hat{\psi}(t,\vec{x})$ が変化しないという自由度に求めることができることが示される．

参考文献

1) ゲージ理論とか時空の対称性に関係した側面の解説としては藤川和男：『ゲージ場の理論』（岩波講座現代の物理学）（岩波書店，1997）．
その他の話題に関しては，本特集の他の解説を参照されたい．

（ふじかわ・かずお，日本大学理工学部）

隠れた定数
暗黒エネルギー

辻川 信二

1. はじめに

1990年代初頭からの観測技術の急激な向上により，宇宙の膨張史や様々な宇宙論パラメータが高い精度で明らかになってきた．特に，1998年に発表された遠方のIa型の超新星（SN Ia）の観測データから，現在の宇宙を占めるエネルギーの約73%が，**暗黒エネルギー**と呼ばれる宇宙を加速膨張させる未知の成分であることが示された[1)]．宇宙背景輻射（CMB）の温度揺らぎの観測[2)]や，宇宙の大規模構造（LSS）の観測[3)]からもその存在は独立に示唆されている．

暗黒エネルギーとは，重力とは逆の斥力のような働きをもち，原子などの通常の物質（以後，バリオンと呼ぶ）とは異なり，ほとんど重力収縮しない．現在の宇宙のエネルギーの約23%は，**暗黒物質**というこれも起源が不明の物質であり，残りの4%程度がバリオンであることが様々な観測から分かっている．暗黒物質は，光やバリオンとの相互作用が非常に弱いため捕まえにくいが，重力的には収縮して集まることができる．実際，暗黒物質は宇宙の大規模構造の形成に主導的な役割を果たしたと考えられており，バリオンのみでは観測と合うような十分な構造形成が起こらない．

暗黒物質に関しては，大型ハドロン衝突型加速器などの地上での素粒子の衝突実験を通して，その存在を探る試みが行われている．それに対して暗黒エネルギーは，重力的にさえも集まらないため，実験的にその存在を直接的に検証することが暗黒物質よりもさらに難しい．暗黒エネルギーの存在が重要になるのは，一般的に非常に大きな宇宙論的スケールであり，現状では，宇宙の大規模な観測を通して間接的にその検証を行うしか方法はない．その一方で，様々な観測からその性質に関して制限がつくため，その起源を探るべく世界中で活発に研究が行われている．実際，“dark energy”という単語をタイトルに含む学術論文の数は，2011年3月現在で2500を越えている．

本稿では，暗黒エネルギーの起源を理論的に探る試みに関して解説する．そのような研究についてより詳しく知りたい読者の方は，例えばレビュー論文[4)]や専門の本[5)]を参考にしていただきたい．

2. 宇宙項

宇宙の進化を記述するには，一般相対論の基盤である**アインシュタイン方程式**を解く必要がある．観測的に，宇宙はほぼ一様，等方であり，かつ平坦に近いことが分かっている．そのような場合，アインシュタイン方程式は単純な形となり，宇宙の膨張率を H, 宇宙に存在する物質の密度を ρ, 重力定数を G として，

$$3H^2 = 8\pi G\rho \tag{1}$$

が成り立つ．膨張率 H は，時間 t とともに変化する宇宙のスケールを表す量 $a(t)$（スケール因子

という）を用いて，$H = \dot{a}/a$ と書ける（ドットは時間 t による微分）．上記の物質は，その圧力を P とすると，一般相対論における保存則を満たすという要請から，

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0 \tag{2}$$

という連続方程式を満たす．

式 (1) から明らかなように，宇宙に存在する物質（密度 ρ）によって宇宙の進化（膨張率 H）は異なる．もし宇宙が膨張しても密度 ρ が変化しない物質があるとすると，式 (1) から H は一定となる．この場合，$\dot{a}/a = H$ を積分し，宇宙が指数関数的に膨張する解 $a \propto e^{Ht}$ が得られる．観測的に，暗黒エネルギーの性質は，このように ρ が一定の場合（**宇宙項**という）に近いことが分かっている．

宇宙が膨張しているにも関わらず密度が減少しないというのはとても奇妙に思える．ρ が一定のとき $\dot{\rho} = 0$ であるから，式 (2) から，$P = -\rho\ (< 0)$ であり，宇宙項は負の圧力を持つ．一様等方宇宙で任意の一点を中心とした半径 a, 体積 $V = 4\pi a^3/3$ の球を考えると，式 (2) は，微少変化の形で

$$d(\rho V) = -P\,dV \tag{3}$$

と書ける．左辺は，球内の“内部エネルギー” ρV の変化，右辺の $P\,dV$ は物質が外部にする仕事を表すと考えることができ，その意味で式 (3) は，断熱過程での熱力学第一法則に対応する．$P < 0$ のとき，体積 V が増えても $P\,dV < 0$ であるから，球内の物質は外部から，実効的に正の仕事 $-P\,dV > 0$ をされていると解釈できる．その結果，内部エネルギー ρV は増大する．つまり宇宙項は，宇宙が膨張していても内部エネルギーを増やし続けることができる“究極のフリーランチ”なのである．

暗黒エネルギーの**状態方程式**と呼ばれる量 $w = P/\rho$ に対して，観測的に制限をつけることができる．w が一定であると仮定したときの制限は，2010 年の WMAP グループの統合的な解析によると，68% の確からしさで $w = -1.10 \pm 0.14$ である[2]（図 1 も参照）．宇宙項は $P = -\rho$ であるから，$w = -1$ であり，この制限を満たしている．

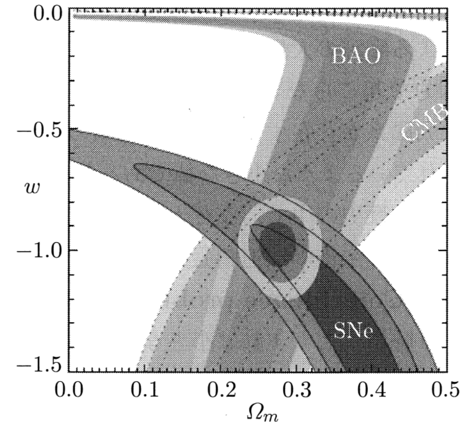


図 1　w が一定のときの，超新星（SNe），宇宙背景輻射（CMB），バリオン音響振動（BAO）からの観測的な制限[6]．横軸の Ω_m は，非相対論的物質の現在の宇宙での割合を示す．

宇宙項はもともと，静的な宇宙を実現するためにアインシュタインが導入した．閉じた宇宙では，その曲率 $K\ (> 0)$ に対応する項 $-3K/a^2$ が式 (1) の右辺に加わり，ρ が一定のとき，$H = 0$ となる解（a が一定）が存在する．この静的宇宙解は不安定であり，さらに 1929 年のハッブルによる宇宙膨張の発見により棄却された．ところが，1990 年代後半になって，宇宙項は現在の加速膨張を説明する源として息を吹き返したのである．

現在のハッブルパラメータ H_0 の値は，観測的に

$$H_0 \approx 10^{-33}\ \mathrm{eV} \tag{4}$$

程度であることが知られている．式 (1) を用いると，宇宙項 Λ のエネルギースケールを H_0 から見積もることができ，$\Lambda \approx 10^{-12}\,\mathrm{eV}^4$ 程度である．密度 ρ が一定である項は，例えば場の量子論における真空のエネルギーとして現れる．しかし，理論的に典型的に現れる真空のエネルギーのスケールは，素粒子物理のエネルギーと関連するため，上記の観測的な Λ の値よりも桁違いに大きい．これは，**宇宙項問題**と呼ばれており，宇宙の加速膨張の発見以前にも問題となっていた．

もし，素粒子物理で現れるようなエネルギースケールの宇宙項が存在するとすると，宇宙は現在

よりはるかに早い時期に加速膨張期に入り，重力収縮による宇宙の大規模構造の形成も，宇宙項による斥力で起こらなかったことになる．つまり，銀河や太陽系が存在するのも，宇宙項の値が現在観測されているような小さな値であるためである．宇宙の長い歴史の中で，なぜ人類が存在する現在近くになって宇宙は加速膨張期に入ったかという問題を，“**Coincidence problem**”（偶然一致の問題）と呼び，どうすれば小さな宇宙項を矛盾なく得られるかという問題と深く関連している．

理論的な側面では，超弦理論がすべての力の統一を目指す上で有力な理論と考えられており，それに基づいて暗黒エネルギーの起源を説明しようとする研究が数多く行われている．特に Kachru らは，タイプ II 型の超弦理論においてフラックスコンパクト化という手法を用い，一定の正エネルギーをもつ真空解の構築に成功した[7]．そのような理論は一般に，10^{500} 個もの極小値をもつ真空の数を予言する．人間原理的な考え方を適用し，我々が住むのはそのような多数の真空のうちの一つであると考え，真空の確率分布を議論している研究者もいる．一方でそのようなシナリオは，理論の明確な予言力をもたないと否定的な研究者もおり，今後のさらなる進展が望まれる．

3. 物質の変更による暗黒エネルギー模型

宇宙項は，状態方程式が $w=-1$ で一定の模型であるが，w が変化する模型も提唱されている．宇宙の進化を記述するアインシュタイン方程式は，時空の曲がり具合を特徴づける**アインシュタインテンソル** $G_{\mu\nu}$ と，物質分布を特徴づける**エネルギー運動量テンソル** $T_{\mu\nu}$ を用いて，$G_{\mu\nu}=8\pi G T_{\mu\nu}$ と書ける．暗黒エネルギーの模型を大きく 2 つに分けると，(i) 物質として特殊なものを考えるもの（$T_{\mu\nu}$ を変更する），(ii) 重力理論を変えるもの（$G_{\mu\nu}$ を変更する）の 2 つがある．本節では (i) の模型を，4 節では (ii) の模型を解説していく．また，宇宙の非一様性によって，“みかけの”加速膨張を起こすシナリオも存在するが，紙面の都合上，それについては解説しないことにする．

素粒子論に基づくと，**スカラー場**と呼ばれるローレンツ変換に関して不変なスカラー量が現れる．スカラー場 ϕ の持つポテンシャルエネルギー $V(\phi)$ によって宇宙の加速膨張を起こす暗黒エネルギー模型は，**クインテッセンス**と呼ばれている[8]．

クインテッセンスの密度 ρ および圧力 P は，それぞれ運動エネルギー $\dot{\phi}^2/2$ とポテンシャルエネルギー $V(\phi)$ を足し引きしたもので，$\rho=\dot{\phi}^2/2+V(\phi)$, $P=\dot{\phi}^2/2-V(\phi)$ と書ける．これらを式 (1) と式 (2) に代入することで，

$$3H^2=8\pi G\,[\dot{\phi}^2/2+V(\phi)], \tag{5}$$

$$\ddot{\phi}+3H\dot{\phi}+V_{,\phi}=0 \tag{6}$$

を得る（$V_{,\phi}=dV/d\phi$）．ポテンシャルが平坦に近ければ，運動エネルギーが小さく条件 $\dot{\phi}^2/2\ll V(\phi)$ を満たす．この場合，近似的に $\rho\approx V(\phi)$ であり，ポテンシャルが宇宙項と似た働きを示す．

ただし，クインテッセンスが宇宙項と異なるのは，$V(\phi)$ の変化が小さいなりにもある点である．場がゆっくりと動くと，式 (6) において 2 階微分の項 $\ddot{\phi}$ が他の左辺の項に比べて無視でき，$3H\dot{\phi}\approx -V_{,\phi}$ が成り立つ．この式は，場がポテンシャルを転がることによる項 $-V_{,\phi}$ と，宇宙膨張による“摩擦項” $3H\dot{\phi}$ がほぼ釣り合いを保ちながら，場がゆっくりと動くことを示している．

クインテッセンスが暗黒エネルギーの起源であるとすると，その状態方程式は，

$$w=\frac{P}{\rho}=\frac{\dot{\phi}^2/2-V(\phi)}{\dot{\phi}^2/2+V(\phi)} \tag{7}$$

と表せる．条件 $\dot{\phi}^2/2\ll V(\phi)$ の下では，w は -1 に近いが，もちろん宇宙項のときのように厳密に -1 ではない．つまり w の変化を調べることで，宇宙項と観測的に区別することが可能である．クインテッセンス模型は，(a) 勾配が次第にゆるやかになる “freezing” 模型［例えば，$V(\phi)=M^{4+n}\phi^{-n}$］や，(b) 勾配が徐々にきつくなる “thawing” 模型［例えば，$V(\phi)=M^4\cos^2(\phi/f)$］の 2 つに分けることができる（図 2 を参照）．(a) の場合は w が

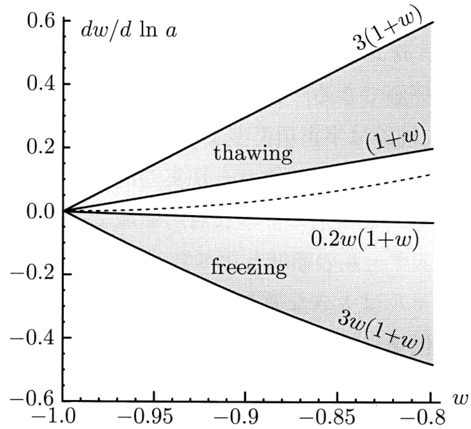


図2 状態方程式 w とその微分 $dw/d\ln a$ による，freezing 模型と thawing 模型の分類[9]．2つの模型では $dw/d\ln a$ の符号が異なる．

徐々に -1 に近づく（w の微分 $dw/d\ln a$ が負）が，(b) の場合は w が徐々に -1 から増えていく（$dw/d\ln a > 0$）．ただし現状では，クインテッセンス模型が宇宙項よりも好まれるという強い観測的な兆候はない．

クインテッセンスが暗黒エネルギーの起源であるとすると，その場の質量 m_ϕ は，$H_0 \approx 10^{-33}$ eV 程度と非常に小さい．そのような小さな質量の場は伝搬がしやすく，バリオンなどとの相互作用を持つのが自然であるが，そのような"第5の力"は発見されていない．さらに，素粒子論からクインテッセンス模型を構築しようとすると，一般にポテンシャルの平坦性を崩すレベルの量子補正が存在する．ただし，アキシオンという場に基づく模型のように，そのような問題を回避できる模型も提唱されている．超弦理論などを用いて，無矛盾なクインテッセンス模型を理論的に構築する試みは，現在進行中の研究である．

また，ポテンシャルでなく，スカラー場 ϕ の運動エネルギー $X = \dot{\phi}^2/2$ の非線形項を用いる **k-エッセンス**と呼ばれる模型も提唱されている[10]．この模型では，圧力 P が ϕ と X に依存し，場の密度 ρ は $\rho = 2XP_{,X} - P$ と表せるため（$P_{,X} = \partial P/\partial X$），k-エッセンスの状態方程式は，

$$w = \frac{P}{2XP_{,X} - P} \tag{8}$$

である．

式 (8) から，条件 $|2XP_{,X}| \ll |P|$ が満たされると，w が -1 に近い．クインテッセンスは $P = X - V(\phi)$ に相当し，この場合は $P_{,X} = 1$ であり，X が V よりも十分小さいことで加速膨張が起こる．その一方で，P が X の非線形項を含む場合，$P_{,X}$ が 0 に近くなり得る．例えば，$P = -X + X^2/M^4$（M は定数）と表せる**ゴースト凝縮**[11]と呼ばれる模型では，X^2 の項の存在により，$X = M^4/2$ 付近で $P_{,X}$ が 0 に近く加速膨張が起こる（この模型の詳細は，向山氏の記事を参照されたい）．超弦理論に動機づけられたディラトンゴースト[12]凝縮模型 $P = -X + e^{\lambda\phi}X^2/M^4$ や，**タキオン模型**[13] $P = -V(\phi)\sqrt{1-2X}$ も，k-エッセンスに属している．それぞれの模型に応じて状態方程式 w の進化は異なり，その意味で宇宙項と区別することが可能である．

以上は，スカラー場を用いた模型の話であるが，完全流体を用いて宇宙の加速膨張を説明しようとする研究もある．例えば，状態方程式が $P = -A/\rho$（A は正の定数）と表される**チャプリギンガス**と呼ばれる模型[14]では，物質優勢期の初期には P が 0 に近く流体があたかも暗黒物質のように振る舞い，後期になって負の圧力の効果が大きくなり流体が暗黒エネルギーのように振る舞う．これは，暗黒エネルギーと暗黒物質を一つの流体で統一的に説明可能な魅力的な模型であるが，物質の密度揺らぎの進化を調べると，観測されている宇宙の大規模構造の分布と合わないことが示されており，その意味でこの模型は観測的に棄却されている．

$P = -A/\rho^\alpha$ という形の一般化されたチャプリギンガス模型[15]では，宇宙の大規模構造の観測から $|\alpha| < 10^{-5}$ という制限がついており，ほとんど宇宙項（$\alpha = 0$）と区別できないことを示している．ただし，k-エッセンスを用いて2つの暗黒成分を統一的に扱う試みもあり，宇宙項と識別が可能な模型も存在する．いずれにせよ，そのような模型の観測的な兆候を探るには，密度揺らぎも含めた宇宙進化の詳細な解析が不可欠である．

4. 重力理論の変更による暗黒エネルギー模型

本節では，アインシュタイン方程式の左辺を変更する，いわゆる重力理論の変更による暗黒エネルギー模型に関する解説を行う．このタイプの模型としては，(i) $f(R)$ 重力理論，(ii) DGP ブレーンワールド，(iii) ガリレオン重力理論などに基づく模型がある．宇宙の大規模構造が関連する領域以上の大スケールでは，重力理論が一般相対論からずれている可能性がある．その一方で，太陽系での重力実験から，宇宙の中で密度が高い局所領域では，一般相対論からのずれが小さいことが分かっている．上記の模型 (i)–(iii) は，そのような要請を満たすように構築されており，重力実験による制限も加わることから，一般的に物質の変更による模型と比べて制限は強くなる．

(i) の $f(R)$ **重力理論**は，系のラグランジアン f がスカラー曲率 R の関数で書けている模型で，一般相対論で宇宙項 Λ が存在する場合は，$f(R)=R-2\Lambda$ という単純な形をとる．理論がゴーストやタキオンのような問題点を持たないために，f の1階微分 $f_{,R}$ と2階微分 $f_{,RR}$ がともに正である必要があり，それ以外にも，有効な宇宙論的な解の存在や，局所重力の実験による制限が加わる．これらを満たし得る $f(R)$ の形として，例えば，

$$f(R)=R-\lambda R_c\frac{(R/R_c)^{2n}}{(R/R_c)^{2n}+1} \qquad (9)$$

などが提唱されている[16] $(n>0)$．定数 R_c の大きさは現在の宇宙の平均的なスカラー曲率程度であり，太陽系のように R が R_c に比べて十分に大きい領域では，(9) は宇宙項模型 $f(R)=R-\lambda R_c$ に近い．また，$f(0)=0$ であることから，平坦な時空（$R=0$）において宇宙項は消えている．

R が R_c に近い現在付近の宇宙では，模型 (9) は，宇宙項模型からのずれを示す．このことは暗黒エネルギーの状態方程式 w にも現れ，w が -1 よりも小さくなるという特徴的な振舞いを示す．しかも物質の密度揺らぎの成長率が，重力理論の変更により宇宙項模型と比べて大きくなり，LSS や CMB の観測にその痕跡を残す．およその目安として，$n\geq 2$ であれば，これらの観測と矛盾しないと評価できる[17]．

$f(R)$ 理論は宇宙項模型よりもスカラーの自由度が1つ多く，このスカラーが実効的なポテンシャルを持つ．太陽系のような局所領域では，宇宙論的な大スケールの領域と比べて，模型 (9) の有効ポテンシャルは大きな質量をもち，カメレオン機構という機構により，スカラーとバリオンとの相互作用は小さくなる．太陽系内の様々な重力実験の結果を用いて，$n\geq 1$ という制限がついている[18]．

宇宙の過去にさかのぼると，R の増加とともにスカラー自由度の実効的な質量が非常に大きくなり，振動するモードの存在が重要になる．局所重力の制限を満たす $f(R)$ 模型では，この振動モードが背景のスカラーと比べて小さくないと有効な宇宙論的な解が得られないことから，ある種の初期条件に対する微調整が要求される[17]．

(ii) の **DGP ブレーンワールド**[19]は，4次元時空に余剰次元を考え，5次元の“バルク”の中に我々の住む“ブレーン”が埋め込まれているという模型である．バルクがミンコフスキ時空の場合，ブレーン上で膨張宇宙での式を導くと，重力の5次元への伝搬による効果により，宇宙が加速膨張する解が現れる．具体的には，ブレーン上でのハッブルパラメータを H，物質密度を ρ_m として，

$$H^2-\frac{H}{r_c}=\frac{8\pi G_4}{3}\rho_m \qquad (10)$$

が成り立つ．ここで r_c は，5次元と4次元の重力定数 G_5 と G_4 の間の比によって決まる定数である．非相対論的物質の場合，ρ_m は a^{-3} に比例して減少し，式 (10) から最終的に $H\to 1/r_c=$一定となる加速膨張解が存在する．

曲率が大きい領域では，ブレーンの曲がりに相当するスカラーモード ϕ により，ϕ の自己相互作用項 $\Box\phi(\nabla\phi)^2$ が現れる．スカラー場 ϕ はポテンシャルを持っていないが，この自己相互作用により，場が曲率の大きな領域で伝搬しにくくなり，太陽系での局所重力の制限を満たすことが可能である．これは，ヴァインシュタイン機構と呼ばれ

ており，カメレオン機構とは異なり，質量を持たない粒子に対しても適用できる．

DGP 模型は，余剰次元の存在で加速膨張を引き起こす興味深い模型であるが，ゴーストが存在し，理論的には問題を抱えている．それに加え，超新星とバリオン振動のデータを用いた統合的な解析から，観測的に好まれないことが分かっている．

自己相互作用項 $\Box\phi(\nabla\phi)^2$ により得られる ϕ の運動方程式は，ミンコフスキ時空でのガリレイ変換 $\partial_\mu\phi \to \partial_\mu\phi + b_\mu$ に関して不変である．この変換に対して方程式が不変であるという要請を課すと，$\Box\phi(\nabla\phi)^2$ 以外にも 4 つの項が現れ，そのような場を**ガリレオン**と呼ぶ[20]．ガリレオン理論は，暗黒エネルギーに対して応用されており，安定な加速膨張解が存在することが示されている[21]．

ガリレオン場は質量が 0 で，運動エネルギーの非線形項をもち，ヴァインシュタイン機構により重力実験の制限を満たすことが可能である．しかも，ゴーストや揺らぎの不安定性の問題を回避できるパラメータ領域が存在する．ガリレオン模型では，$f(R)$ 重力理論よりも一般的に物質揺らぎの成長が早く，LSS や CMB に特徴的な痕跡を残す．将来の観測によって，そのような異なる模型の間の選別が可能になることが期待される．

5. 終わりに

暗黒エネルギーの起源を解明するには，理論的な試みだけでなく，観測的な側面からその性質に迫ることが重要であり，SN Ia, CMB, LSS 以外にも，バリオン振動，重力レンズ，ガンマ線バーストなどの様々な観測の精度が上がりつつある．特に，4 節で解説した修正重力理論では，背景の宇宙進化だけでなく，密度揺らぎの進化が宇宙項模型と異なるために，LSS や重力レンズの詳細な観測から模型に強い制限をつけることが可能である．

本稿で解説した理論模型のうち，チャプリギンガス模型と DGP ブレーンワールド模型は観測的な制限を満たさず，将来の精度の良い観測からそれ以外のいくつかの模型も棄却することができると期待される．観測から暗黒エネルギーの候補となる模型を絞り込み，素粒子理論や修正重力理論から観測と無矛盾な模型を構築することが理想であろう．現在までの観測は，宇宙項模型と整合性をなしており，まずは観測が宇宙項模型からのずれをどれだけ許すかを調べることが鍵となる．

暗黒エネルギーと暗黒物質の起源が明らかになったとき，我々は超弦理論をも超えるような究極の統一理論を手にすることができるのかもしれない．

参考文献

1) A. Riess *et al.*, *Astron. J.* **116**, 1009 (1998); S. Perlmutter *et al.*, *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999).
2) E. Komatsu *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* **192**, 18 (2011).
3) B.A. Reid *et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **404**, 60 (2010).
4) E.J. Copeland, M. Sami and S. Tsujikawa, *Int. J. Mod. Phys. D* **15**, 1753 (2006).
5) L. Amendola and S. Tsujikawa, "Dark Energy: Theory and Observations", Cambridge University Press (2010).
6) M. Kowalski *et al.*, *Astrophys. J.* **686**, 749 (2008).
7) S. Kachru *et al.*, *Phys. Rev. D* **68**, 046005 (2003).
8) T. Chiba, N. Sugiyama and T. Nakamura, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **289**, L5 (1997); R.R. Caldwell *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1582 (1998).
9) R. Caldwell and E. Linder, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 141301 (2005).
10) T. Chiba, T. Okabe and M. Yamaguchi, *Phys. Rev. D* **62**, 023511 (2000); C. Armendariz-Picon *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 4438 (2000).
11) N. Arkani-Hamed *et al.*, *JHEP* **0405**, 074 (2004).
12) F. Piazza and S. Tsujikawa, *JCAP* **0407**, 004 (2004).
13) A. Sen, *JHEP* **0204**, 048 (2002).
14) A.Y. Kamenshchik, U. Moschella and V. Pasquier, *Phys. Lett. B* **511**, 265 (2001).
15) M.C. Bento, O. Bertolami and A.A. Sen, *Phys. Rev. D* **66**, 043507 (2002).
16) W. Hu and I. Sawicki, *Phys. Rev. D* **76**, 064004 (2007).
17) A.A. Starobinsky, *JETP Lett.* **86**, 157 (2007).
18) S. Capozziello and S. Tsujikawa, *Phys. Rev. D* **77**, 107501 (2008).
19) G.R. Dvali, G. Gabadadze and M. Porrati, *Phys. Lett. B* **485**, 208 (2000).
20) A. Nicolis, R. Rattazzi and E. Trincherini, *Phys. Rev. D* **79**, 064036 (2009).
21) A. De Felice and S. Tsujikawa, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 111301 (2010).

（つじかわ・しんじ，東京理科大学理学部）

隠された粒子と物質
素粒子物理と暗黒物質

川崎　雅裕

1. はじめに

宇宙がどのような物質でできているかは長年にわたって宇宙論の大きな問題である．宇宙に可視光でも電波でも光っていない物質，すなわち，暗黒物質があることは天文学的には今から 80 年以上前にスイス人の天文学者ツビッキー（Zwicky）が銀河団の中の銀河の運動を観測することによってはじめて予言した．現在では様々な宇宙のスケールで大量の暗黒物質の存在することが分かっている．

我々の太陽系がある天の川のような銀河系で，暗黒物質が存在することは銀河の回転曲線から推定できる．銀河の回転曲線は銀河の周りを回っている水素原子から出る電波を観測することによって水素原子の回転速度を測って銀河中心からの距離の関数としてプロットしたものである（図 1）．ニュートン力学を使うと水素原子が円運動する速さ $v(r)$ は

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}$$

となる．ここで G は重力定数，$M(r)$ 中心からの半径 r 内にある全質量である．もし，銀河の質量がその中の星によって担われているとすると，銀河の質量は中心近くの光っている部分にその大部分があり，その外側の質量は小さく，上の式の $M(r)$ は中心から離れた暗いところでは一定となり，回転速度の大きさは $r^{-1/2}$ に比例して減少するはずである．しかし，実際には回転速度の観測値は図 1 に見られるように中心から離れても一定の値を示す．このことから銀河の外側の暗い部分も $M(r) \propto r$ をみたす物質分布（暗黒物質のハロー）があることが分かる．

銀河より大きなスケールの銀河団はツビッキーが最初に暗黒物質の存在を予言した系であるが，銀河の運動（速度）を観測することから見積もられる質量は銀河の明るさから推定される質量（$\simeq$ 星の総量）より 1 桁以上大きく，光ってない物質，つまり暗黒物質がたくさんあることが分かる．また，銀河団の質量によって背後にある銀河から放出された光が曲げられる重力レンズ効果の観測からも暗黒物質の存在が確かめられている．

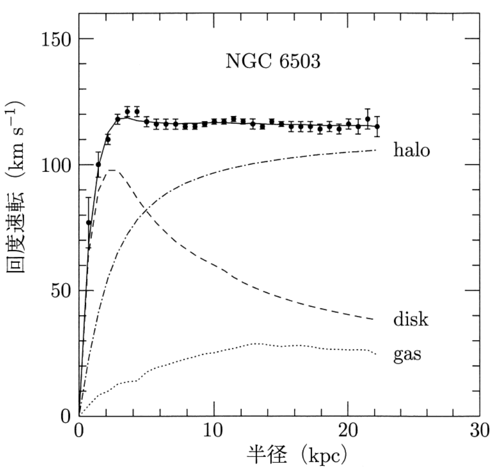


図 1　銀河の回転曲線．誤差付きの黒丸は観測値を表す．破線，点線，一点破線はそれぞれ銀河ディスク，ガス，暗黒物質はハローの寄与を表す[1)]．

このように，銀河や銀河団に光っている星よりもずっと大きな量の暗黒物質がある観測的証拠がある．では，宇宙全体でどのくらい暗黒物質があるのかということが当然問題となる．この問題の解答は宇宙が誕生して約 40 万年たった頃に放出された光であるマイクロ波宇宙背景放射の観測によって与えられた．宇宙背景放射は非常に等方的な光であるが 10^{-5} 程度の非等方性が観測されていて，非等方性の大きさや角度の依存性

の違いから宇宙の物質密度やバリオン密度（バリオンは星や我々を作っている原子・分子の構成要素である陽子や中性子の総称）を正確に求めることができる．WMAP 衛星による 7 年間の観測データから暗黒物質とバリオンが現在の宇宙の密度に占める割合は

$$\Omega_{暗黒物質} = 0.227 \pm 0.014,$$

$$\Omega_{バリオン} = 0.0456 \pm 0.0016$$

と求まる[2)]．このことから，宇宙全体で見ても星などのバリオンの 5 倍程度の暗黒物質が存在することが分かる．

2. 暗黒物質の性質

前節で見たように我々の宇宙には現在の密度で約 23%もの暗黒物質が存在する．銀河の回転曲線や銀河団の運動からその存在が示されていることから分かるように暗黒物質の存在は重力を通じて確かめられている．言い換えれば，暗黒物質は通常の物質と非常に弱い相互作用しかしない．このことから，暗黒物質は電気的に中性で，カラーを持たないことが要請される．電荷を持てば，電磁相互作用を行い，カラーを持てば強い相互作用を行うからである．

暗黒物質が非常に弱い相互作用しかしないことをよく示しているのは図 2 に示した弾丸銀河団である[3)]．弾丸銀河団は 2 つの銀河団が衝突した後の状態を示している考えられる．図 2 の上の写真は可視光でとったもので光っている点が銀河で，図に描かれている等高線が重力レンズ効果で求めた暗黒物質分布を表している．銀河と物質は同じように分布していて隣接する 2 つの銀河団があることが分かる．一方，下の図は X 線で見た弾丸銀河団で 2 つの銀河団の間で強い X 線が出ていることが分かる．これは 2 つの銀河団が衝突した際に銀河団にあったガスどうしが衝突して暖められ X 線を放出していると考えられる．上の図で見られるように星と暗黒物質の分布にガスのような衝突の影響は認められず衝突の際にそのまますり抜けていったことを表している．銀河は数が少なく 2 つの銀河団の銀河が直接衝突する可能性が極めて低いため通り抜けたと考えられるが，ガスより大量にある暗黒物質分布が衝突の影響を受けないのは暗黒物質が他の物質とほとんど相互作用しないことを明確に示している．さらに，弾丸銀河団において銀河以上に質量を持つガスが 2 つの銀河団の間に集まった状態にも関わらず重力の分布が 2 つの銀河団の中心として広がっていることは暗黒物質が重力が長距離でニュートンの法則からずれることによって生じる見かけ上のものではなく実際に物質が存在していることの証拠にもなっている．

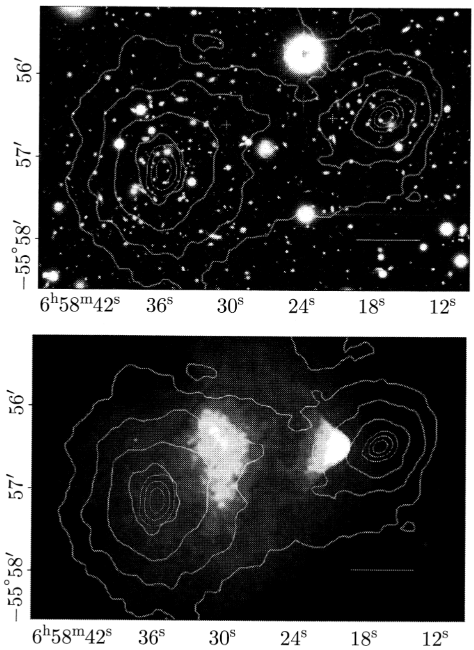


図 2 弾丸銀河団．上は可視光でとったの写真，下は X 線写真．等高線は重力レンズ効果で求めた暗黒物質の分布[3)]．

また，暗黒物質は他の物質に崩壊しない「安定」なものでなくてはならない．そうでないと現在の宇宙の大量に存在することができないからである．ここで，「安定」という意味は真に安定であるか，崩壊するとしてもその寿命が宇宙年齢約 137 億年よりも長くてはならないということである．一般に，弱い相互作用しかしない質量を持った安定な粒子を WIMP（ウィンプ）と呼ぶ（WIMP は weakly interacting massive particle の略である）．

さらに，暗黒物質の性質を考える上で重要なのが宇宙の構造形成との関係である．ここまでの話にも登場している銀河や銀河団といった宇宙の構造は宇宙のごく初期に起こったと考えられるインフレーションによって作られた微少な密度の揺らぎが重力によって成長した結果形成されたものである．宇宙の物質密度の大部分は暗黒物質が担っているので，暗黒物質の揺らぎが宇宙の構造を作る上で重要となる．構造形成を考える上で暗黒物質には「**冷たい暗黒物質**」と「熱い暗黒物

質」の2種類に分類される．冷たい暗黒物質は構造形成の時期に暗黒物質を構成している粒子の速度がほぼゼロである暗黒物質で，一方，熱い暗黒物質はそれを構成する粒子が大きな速度を持っている暗黒物質である．熱い暗黒物質は大きな速度を持っているためそれが運動して動く長さスケールより小さな揺らぎは，運動によって平均化され消されてしまう．そのため，銀河のような比較的小さな構造が作られず現実の宇宙を説明することができない．したがって，暗黒物質は冷たくなければならない．

以上のことから暗黒物質を構成する粒子は

- 安定である，または寿命が宇宙年齢より長い，
- 他の物質と弱い相互作用しかしない粒子，
- 電気的に中性で，カラーを持たない粒子，
- 冷たい粒子

であることが要請される．

3. 暗黒物質粒子の候補

前節で，天文的な観測・考察から要請される暗黒物質を構成する粒子の性質について述べた．では，実際に暗黒物質粒子は何であろうか？ ここからは素粒子物理の問題となる．まず，現在の素粒子の標準模型で暗黒物質を説明できるかを考える．安定で，中性で，弱い相互作用しかしないということから候補として考えられるのはニュートリノである．実際，1980年代には，トリチウムの β 崩壊実験で電子ニュートリノについてその質量が測定されたという報告もあって，数十eV（電子ボルト）程度の質量を持つニュートリノが暗黒物質ではないかと考えられていた．しかし，その後のニュートリノ振動実験とトリチウムの β 崩壊実験からニュートリノの質量とそれに対応する宇宙の密度に占める割合が

$$m_\nu < 2.2\,\mathrm{eV}, \quad \Omega_\nu < 0.14$$

という上限が得られ，ニュートリノが暗黒物質すべてを説明することはできない．さらに，ニュートリノは質量が小さいため速度が大きく「熱い暗黒物質」に分類されるため宇宙の構造形成の上で大きな問題となる．また，ニュートリノが質量を持つと宇宙背景放射の温度揺らぎに影響を与える．これらのことから宇宙論的制限として

$$m_\nu < 0.19\,\mathrm{eV}, \quad \Omega_\nu < 0.0064$$

が与えられ[2]，ニュートリノが暗黒物質とは考えられない．したがって，暗黒物質粒子の存在は素粒子の標準模型を超えた理論で説明する必要がある．

現在，暗黒物質粒子の候補として有望視されているのは，**超対称性理論**で予言される新たな粒子と素粒子の強い相互作用でのCPの保存を説明するために考えられたペチャイ・クイン（Peccei–Quinn）機構で現れる**アクシオン**と呼ばれる粒子である．

4. 超対称性粒子

超対称性はスピンが整数のボゾン（boson）と半整数のフェルミオン（fermion）との対称性で，超対称性変換 Q の下で

$$Q|\mathrm{boson}\rangle = |\mathrm{fermion}\rangle,$$
$$Q|\mathrm{fermion}\rangle = |\mathrm{boson}\rangle$$

のように変換する．したがって，標準模型にある粒子に対してそれがフェルミオンならボソンの，ボゾンであればフェルミオンのパートナーとなる粒子が存在する．表1と表2に標準模型の粒子と対応する超対称性粒子を示した．例えば，スピン1/2のクォークの超対称性パートナーはスピン1のスクォークである．素粒子の標準模型では素粒子の間に働く力は $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ という対称性で表されるゲージ相互作用で記述され，$SU(3)_c$ はカラーを持ったクォーク・グルーオンに働く強い相互作用の対称性，$SU(2)_L \times U(1)_Y$ は電弱相互作用の対称性である．表にある粒子はこれが自発的に破れて電磁相互作用の対称性 $U(1)_{\mathrm{em}}$ になる前の粒子を示したもので，破れた後は W^0 と B^0 が混合して質量を持った Z 粒子と質量ゼロの光子になる．また，対応する粒子は同じ量子数を持つ．もし，超対称性が完全ならば標準模型の粒子とそのパートナーは同じ質量を持つが，現実には超対称性粒子はまだ見つかっていない．これは超対称性が我々が実験できるような低エネルギーでは破れていて，超対称性粒子は $O(100)$ GeV–$O(1)$ TeV の質量を持つためだと考えられる．素粒子物理において超対称性が望まれるのは素粒子にある $O(100)$ GeV の電弱スケールと大統一理論のスケール $O(10^{16})$ GeV という大きなエネルギーの階層性の問題を解決できるからである．

さらに，超対称性理論では一般に R パリティというものが存在する．R は

表1　標準模型の粒子.

スピン（S）	粒子
1/2	ニュートリノ（ν_e, ν_μ, ν_τ） 荷電レプトン（e, μ, τ） クォーク（u, d, c, s, t, b）
1	グルーオン（g） ウィーク・ボゾン（$W^\pm, W^0$） B ボゾン（B^0）
0	ヒッグス（$H_u^+, H_u^0, H_d^0, H_d^-$）
2	重力子（$h_{\mu\nu}$）

表2　超対称性粒子.

スピン（S）	粒子
1	スニュートリノ（$\tilde{\nu}_e, \tilde{\nu}_\mu, \tilde{\nu}_\tau$） 荷電スレプトン（$\tilde{e}, \tilde{\mu}, \tilde{\tau}$） スクォーク（$\tilde{u}, \tilde{d}, \tilde{c}, \tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{b}$）
1/2	グルイーノ（$\tilde{g}$） ウィーノ（$\tilde{W}^\pm, \tilde{W}^0$） ビーノ（$\tilde{B}^0$）
1/2	ヒグシーノ（$\tilde{H}_u^+, \tilde{H}_u^0, \tilde{H}_d^0, \tilde{H}_d^-$）
3/2	グラビティーノ（$\tilde{\psi}_\mu$）

$$R = (-1)^{3(B-L)+2S}$$

で定義され（B, L はそれぞれバリオン数，レプトン数），標準模型の粒子は R パリティ $+1$，超対称性粒子は -1 となる．このことからもっとも軽い超対称性粒子（Lightest supersymmetric particle: LSP）は崩壊することができなく安定となる．したがって，このもっとも軽い超対称性粒子が暗黒物質になると期待されているのである．

では，具体的に暗黒物質となる超対称性粒子は何だろうか？ 中性でカラーを持たないということから，中性のウィーノ $\tilde{W}^0$，ビーノ $\tilde{B}^0$，中性のヒグシーノ $\tilde{H}_u^0, \tilde{H}_d^0$，スニュートリノ $\tilde{\nu}$，グラビティーノ $\tilde{\psi}_\mu$ が候補として残る．しかし，スニュートリノとグラビティーノを除く粒子 $\tilde{W}^0, \tilde{B}^0, \tilde{H}_u^0, \tilde{H}_d^0$ は混合しては**ニュートラリーノ**（$\tilde{\chi}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$）と呼ばれる質量の固有状態を作るので，結局，もっとも軽いニュートラリーノ，スニュートリノとグラビティーノの3つが残る．

また，スニュートリノが暗黒物質だとするとすでに，地上での直接検出ですでに見つかっているはずであるが，実際には見つかってないことから暗黒物質候補とは考えられない．したがって，もっとも軽いニュートラリーノとグラビティーノが候補として残る．

最初にニュートラリーノがLSPの場合を考えよう．ニュートラリーノ χ と他の粒子との相互作用は弱いが宇宙初期においては，例えば次のような対消滅・生成反応によって熱平衡にあると考えられる．

$$\tilde{\chi} + \tilde{\chi} \leftrightarrow q + \bar{q}, \quad l + \bar{l}.$$

ここで，q, l はクォーク，レプトン（ニュートリノまたは荷電レプトン）を表す．しかし，宇宙の温度が下がりニュートラリーノが非相対論的，つまり，温度 T がニュートラリーノの質量 m_χ に比べて低くなると熱平衡分布はボルツマン分布に従い，その数密度波 n_χ は

$$n_\chi = \left(\frac{m_\chi T}{2\pi}\right)^{3/2} \exp(-m_\chi/T)$$

で与えられるので，ニュートラリーノの数は急速に減少する．このため，弱い相互作用しかしないニュートラリーノは，熱平衡を維持するのに十分な対消滅・生成反応を起こすことができずに熱平衡から離脱し，他の粒子と反応せず，その密度が宇宙膨張によって薄められるだけになる．したがって，ニュートラリーノの宇宙における存在量は対消滅断面積に反比例し，現在の宇宙の密度に占める割合は

$$\Omega_\chi \simeq \frac{6 \times 10^{-27}\mathrm{cm^3 s^{-1}}}{\langle \sigma v \rangle}$$

となる．ここで $\langle \sigma v \rangle$ は対消滅の断面積と相対速度の積の平均値である．宇宙の暗黒物質を説明するのに必要な断面積は $\langle \sigma v \rangle \simeq 3 \times 10^{-26}\mathrm{cm^3 s^{-1}}$ となるが，この値は 0.1–1 TeV の質量を持つ，弱い相互作用をする粒子の典型的な断面積（$\sigma \sim 10^{-4}/m_\chi^2$）と大まかに一致する．この一致をWIMPミラクルと呼ぶ人もいる．このように，ニュートラリーノは自然に暗黒物質を説明でき，後で述べるように近い将来地上の実験で検出される可能性もあるため，非常に魅力的な候補となっている．

次に，グラビティーノがLSPの場合を考えよう．グラビティーノは重力を媒介する重力子の超対称性パートナーであり，他の粒子と重力を通じてのみしか相互作用しない，つまり相互作用が非常に弱いが，宇宙の温度がプランク温度（$\sim 10^{19}$ GeV）の時には熱平衡にあると考えられる．しかし，現在の宇宙論では宇宙のごく初期にインフレーションと呼ばれる急激な宇宙膨張が起こったと考えられていて，それ以前にあったグラビティーノはこの膨張で薄められてなくなってしま

う．しかし，グラビティーノはインフレーション宇宙の再加熱時（インフレーションを起こしていた真空のエネルギーが解放され，熱い宇宙になる時期）に生成され，その存在量はグラビティーノの質量が約 1 keV 以上では

$$\Omega_{3/2} \simeq 0.7 \left(\frac{T_R}{10^7\,\mathrm{GeV}}\right)\left(\frac{m_{\tilde{g}}}{500\,\mathrm{GeV}}\right)^2\left(\frac{m_{3/2}}{\mathrm{GeV}}\right)^{-1}$$

と見積もられ[4]，質量が約 1 keV 以下では

$$\Omega_{3/2} \simeq \left(\frac{m_{3/2}}{\mathrm{keV}}\right)$$

となる．ここで，T_R はインフレーション後の再加熱温度，$m_{\tilde{g}}$ はグルイーノの質量，$m_{3/2}$ はグラビティーノの質量である（グラビティーノのスピンは 3/2 なので "3/2" という添え字をグラビティーノを表すのに用いる）．約 1 keV 以下の質量のグラビティーノで存在量が再加熱温度によらなくなるのは，そのように軽いグラビティーノは温度約 100 GeV 以上で熱平衡になるためである．したがって，再加熱温度とグラビティーノの質量がちょうどうまい値をとれば暗黒物質を説明することができる．

グラビティーノの質量は超対称性が破れ，それがどう伝わるかによって異なり，$m_{3/2} = O(10)\,\mathrm{eV} \sim O(100)\,\mathrm{TeV}$ の幅広い値を取り得る．しかし，質量が keV 以下のグラビティーノはある程度大きな速度を持ち，宇宙の構造形成にとって「熱い」暗黒物質に近い（「温かい」と呼ばれる）振舞いをするので好ましくない．また，相互作用が極めて弱いため検出するのは困難である．

5. アクシオン

アクシオンは強い相互作用を記述する量子色力学（Quantum Chromodynamics 略して QCD）における CP の破れの問題を解決するために考えられたペチャイ・クイン機構で現れる粒子である．QCD のラグランジアンには次のような CP を破る項が存在する．

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\theta=0} + \frac{\theta}{32\pi^2} G^a_{\mu\nu}\tilde{G}^{a,\mu\nu}.$$

ここで，$G^a_{\mu\nu}$ はグルーオン場の強さで，$\tilde{G}^{a,\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}G^a_{\alpha\beta}$，$\theta$ は理論のパラメターで CP の破れの大きさを決めている．しかし，実験的には強い相互作用で CP を破る現象は見つかっておらず，中性子の電気双極子を計る実験から，CP の破れを表すパラメター θ に $\theta < 10^{-9}$ という厳しい制限が得られている．つまり，QCD は CP を非常によい精度で保存していなければならない．しかし，QCD 自体には CP を破る項を禁止する理由がなく，θ が非常に小さいことは不自然である．これがストロング CP 問題である．

この問題の解決はペチャイ（R.D. Peccei）とクイン（R. Quinn）によって与えられた[5]．彼らは $U(1)_{\mathrm{PQ}}$ 対称性を持つ複素スカラー場 $\Phi(x)$ を導入し，この場と θ を関係づけ，θ を力学的な自由度とすることによって，$\theta = 0$ がスカラー場のポテンシャルを最小にする解として得られることを発見した．この新しい $U(1)_{\mathrm{PQ}}$ はあるスケール F_a で自発的に破れ，質量ゼロの南部・ゴールドストーン粒子が生成する．これがアクシオン a である．アクシオン場 a と θ は $a = F_a\theta$ という関係があり，アクシオン場は QCD スケール（$\sim 1\,\mathrm{GeV}$）でインスタントン効果によって図 3 に示したポテンシャルを獲得し，$\theta = a/F_a = 0$ でポテンシャルが最小になる．このとき，アクシオンが獲得する質量は

$$m_a \simeq 6.2 \times 10^{-6}\,\mathrm{eV}\left(\frac{F_a}{10^{12}\,\mathrm{GeV}}\right)^{-1}$$

である．

アクシオンの宇宙論的進化を考えると，QCD スケールまでは質量ゼロでポテンシャルを持たないので，アクシオン場の初期値は任意の値を取り得る．いまアクシオン場が宇宙初期にある値 $a_i = F_a\theta_i$ を持っている領域があったとすると，インフレーション宇宙ではインフレーション中にこの領域は現在の我々が観測可能な宇宙全体の大きさ以上に引き延ばされるので，我々の宇宙ではアクシオン場が一様な値 $F_a\theta_i$ を持っていると考えて良い．QCD スケールになるとアクシオンは図 3 のようなポテンシャルを持つので，$\theta_i = 0$ でない限りポテンシャルが最小となる $\theta = 0$ に向かって転がり，最小値の回りでコヒーレントな振動を始める．アクシオンは他の粒子との相互作用が非常に小さくま

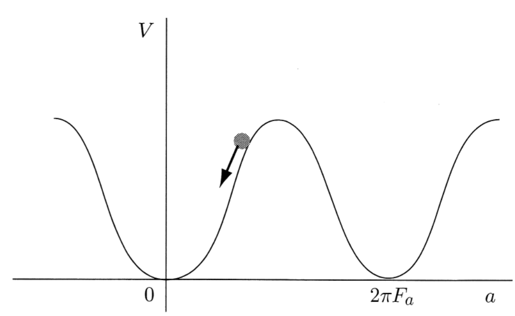


図 3　アクシオンのポテンシャル．

た非常に軽いために寿命が宇宙年齢よりもずっと長く宇宙のスケールでは安定と見なせる．したがって，アクシオンのコヒーレントな振動は現在も残っていて，そのエネルギーは

$$\Omega_a \simeq 0.5\,\theta_i^2 \left(\frac{F_a}{10^{12}\,\mathrm{GeV}}\right)^{1.19}$$

と見積もられる．アクシオンの振動は，速度ゼロの粒子とみなせるので，$F_a \sim 10^{12}\,\mathrm{GeV}$ であればアクシオンが暗黒物質を説明することができる．さらに，速度ゼロの粒子とみなせることから明らかなように構造形成にとってアクシオンは「冷たい」暗黒物質となり，暗黒物質に要請される条件を満たす．

6. 暗黒物質の検出実験

暗黒物質は我々の周りに約 $0.3\,\mathrm{GeV/cm^{-3}}$ の密度で存在し，常に地球上に降り注いでいる．これらの暗黒物質粒子はそのほとんどが何も反応せずに地球を通過していく．しかし，もし，暗黒物質粒子がニュートラリーノのような WIMP であれば，その中のほんの僅かの暗黒物質粒子が原子核と弾性散乱を起こし，エネルギーを原子核に与える．この暗黒物質粒子との散乱で原子核に与えられた反跳エネルギーを測ることによって暗黒物質を検出しようとする試みが世界中で行われている．現在まで WIMP を検出したという信頼できるシグナルは見つかっておらず，暗黒物質と核子の散乱断面積の制限が得られている（図 4）．

日本では XMASS という実験が暗黒物質検出実験が神岡で行われている．これは液体キセノンを標的原子核として用いて，暗黒物質粒子との散乱によってキセノンから放出される光子を検出することによって暗黒物質の存在を検出しようとする実験である．検出感度は図 4 に示した制限より 100 倍程度向上し，ニュートラリーノが暗黒物質の場合の期待値のかなりの領域をカバーすることになるので近い将来の検出が期待されている．

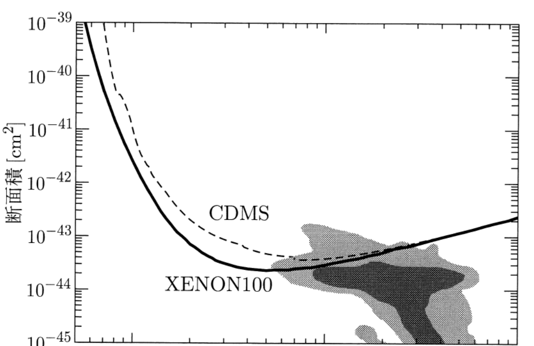


図 4　WIMP と核子との散乱断面性の制限．実線と点線それぞれ XENOMN100 実験，CDMS 実験による制限，右下の領域は理論の期待値を表す[6]．

残念ながら，ここで紹介した他の暗黒物質候補グラビティーノやアクシオンは相互作用が小さすぎるため地上の実験で検出することは簡単ではない．

7. まとめ

暗黒物質は天文学的観測でその存在が推測され，その性質が徐々に明らかにされてきた．素粒子物理は隠された暗黒の物質の候補を提供しているが，候補となる粒子は標準模型を超える新たな理論で予言されるものであり，それらの理論は標準模型が抱える問題を解決するために提案されており，それ自体魅力的な理論であるが，それがさらに暗黒物質も説明できる点は非常に興味深い．ここで紹介した超対称性理論やアクシオンは超対称性や PQ 対称性などに関係していて，隠れた粒子である暗黒物質は隠れた素粒子の対称性の存在を示すものにもなっている．暗黒物質がニュートラリーノであれば近い将来直接検出できる可能性もあり，暗黒の世界に光を当てその構成要素を明らかにすることができる日もそう遠くないかもしれない．

参考文献

1) K.G. Begeman, A.H. Broeils, R.H. Sanders, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **249** (1991) 523.
2) E. Komatsu *et al.* [WMAP Collaboration], *Astrophys. J. Suppl.* **192** (2011) 18.
3) D. Clowe, M. Bradac, A.H. Gonzalez, M. Markevitch, S.W. Randall, C. Jones, D. Zaritsky, *Astrophys. J.* **648** (2006) L109.
4) M. Kawasaki, K. Kohri, T. Moroi, A. Yotsuyanagi, *Phys. Rev.* **D78** (2008) 065011.
5) R.D. Peccei and H.R. Quinn, *Phys. Rev. Lett.* **38** (1977) 1440.
6) E. Aprile *et al.* [XENON100 Collaboration], [arXiv:1103.0303 [hep-ex]].

（かわさき・まさひろ，東京大学宇宙線研究所）

隠れた次元
ブレーン・超弦理論

橋本 幸士

1. 隠れた次元と物理学

我々の住む空間の次元を物理学が決定することができるか？—答えるのが大変困難であり，そもそも物理学の問題なのだろうか，とも感じられるこの問いに，超弦理論は答えるかもしれない．本稿では，そもそも空間の次元を物理学はどのように取り扱っているか，という一般論から始め，超弦理論が明らかにしてきた「隠れた次元」を解説する．じつのところ，超弦理論は，驚くべき答えを用意していた：「次元とはそもそも，1つに決まるものではない」．

我々は空間の次元が3であると信じている．宇宙のすべての物質と力を記述する素粒子物理学の理論も，3次元空間という概念の上に構築されている．しかし，最近の超弦理論の発展によると，3次元空間での理論の計算が，高次元空間の物理と等価であると示されるのである．本稿の最後にはこの驚くべき高次元物理学について述べたい．まさに，「隠れた次元」が創出するのである．

さらにそこでは，空間の次元とは固定された概念ではなく，考えている状況によって見え隠れする，副次的な概念にすぎないことが明らかになる．確定された空間次元が自然のどこかに隠れているのではなく，同一の物理的対象を我々が記述するのに，異なる空間次元を選択できる場合があるのである．

果たして，次元とは何であろうか？ その疑問に，素粒子物理学の最先端が迫ろうとしている．

2. 物理学における次元と簡素化

じつは我々は隠れた次元を頭の中で常に想像している．次元を簡素化する（素粒子物理学では「次元還元」と呼ばれる）ことは，物理学で物体の運動などを捉える際に重要な概念の一つである．「隠れた次元」について，超弦理論などの立場から解説に入る前に，我々が通常取り扱っている次元の性質について，ここではまとめておこう．

大学入試の物理学の問題を眺めてみよう．典型的な力学の問題は，図1のような，斜面を滑り落ちる物体の運動についてである．誰もがそれは3次元空間の物理であると認識しているが，実際に試験の用紙に描かれているのは，斜面としての三角形と，物体（直方体）としての四角形である．つまり，直方体の側面に沿った方向は，問題用紙の紙面に垂直な方向であり，図示されていない．さて，この力学の問題を解くことにしよう．我々は直方体は無限に長いとして考える．斜面も無限に広いとして考える．すると，運動方程式は，直方体の側面に沿った方向の座標には依らない．つまり，紙面に垂直な方向は「隠れた次元」なのである．

この単純かつ日常的な例から，2つのことが分かる．まず第一に，次元を隠すという方法は，物理学において全く日常的に行われているということである．第二に，このような代表的な例を次元という観点から考え直せば，我々の住んでいる空間の次元がじつは3ではないかもしれない，という問いが物理学の問いになり得る，ということである．これら2つのことをより詳

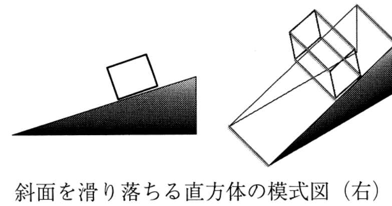


図1 斜面を滑り落ちる直方体の模式図（右）と，次元を隠した図（左）．

しく見てみよう．

直方体が滑り落ちる例で，直方体が無限に長いとしたことは，大学入試の出題をややこしくしているのではない．実際の物理的な物体の運動を取り扱う際，形状を近似して取り扱うことで，運動方程式を解きやすくしているばかりか，運動の本質を抜き出しているのである*1)．本質を抜き出す，というのは，異なる状況にもより簡便に応用可能な形で定式化する，ということを意味する．すなわち，直方体を無限に長くするということは，「物理を抜き出し」ているのである．このような本質の抽出は，物理において最も重要なプロセスの一つである．

物理学は，自然界で発生する多種多様な現象から本質を抽出し抽象化することで発展してきた．数学をその言語として用いているのは，数学が最も普遍的な応用を許すからである．様々な物事に共通する性質を抜き出すためには，近似が必要である．その近似は，大きいものを認めて小さいものを無視するという限られた操作だけではなく，一般に，物事の性質をおおざっぱに抜き出すという操作である．その近似の一つが，次元に関する簡素化なのである．すなわち，隠れた次元をどのように配置するかは，現象を物理的に捉える際に必須のプロセスであり，物理学において日常的に行われている．

さて，第二の点に移ってみよう．もし我々が，斜面や直方体が3次元空間に位置していることを知らず，単に書かれている運動方程式のみを知っていたとしよう．これは例えば，我々の体が蟻のような大きさで，斜面や直方体が広すぎて遠方がどうなっているか分からない，といった状況に相当している．我々は，遠方がどうなっているかをどうやって知ることができるだろうか？ ここに，次元と測定との関係が現れてくる．実際に物体の運動を測定してみると，次元を簡素化した（2次元空間の）運動方程式の計算結果からは若干ずれてくるはずである．このずれが，簡素化してしまった次元方向に物体は実際は形状を依存させている（例えば直方体が有限の長さになっている，など）ことに起因していると仮定した3次元計算と一致すれば，我々は，例え体が蟻のように小さかったとしても，簡素化された次元の方向への依存性を知ることができるのである．この観点は，第一の観点を少し変えただけのように見えるけれども，物理学的には大変重要な変更である．なぜなら，この2次元の話を3次元にし，蟻を人間に置き換えれば，我々がどのように高次元空間を認識できるか，という問題にすり替わるからである．

では，このような観点を元にして，我々の世界の次元を拡張する可能性，そしてそれを観測する可能性について，述べていこう．

3. 超弦理論と隠れた次元

超弦理論は，物質と力の構成要素が点粒子ではなくひもである，という仮説に基づいた物理体系である*2)．面白いことに，そこには2つの重要な次元還元が存在しており，それらが超弦理論を特徴付け，また現実世界との窓口を提供している．これらを順に見ていくことにしよう．

3.1 ひもは粒子に見える：隠れた1次元

すべての構成要素がひもからできているのだと述べられれば，ではなぜそのひもは観測されていないのか？と問うのは当然である．観測に基づいて物理学は成立しているのだから，観測されなければ，物理学とは言えずむしろ机上の空論である．しかし，なぜ観測されていないのか，という疑問は，物理学的に良く定義された問題ではない．物理学では，良い答えを求めるよりむしろ，良い問い方をすることのほうが重要である．この場合むしろ，どうすればひもであることが観測できるのか？ という問い方のほうが良いのである．

超弦理論のひもは小さすぎ，ひもとして見えず，むしろ粒子のように見えると考えられている．すなわち，ひものびている1次元方向は隠れているのである．そこで，どうすればこの1次元を観測できるのか，を考えてみよう．先ほどの第二の観点を思い出してほしい．ひもがまっすぐのびており剛体のようになっていたとして，しかもそれが回転していないとすると，まさに先ほどの例のような次元還元が起こり，粒子と同じように見なせてしまう．つまり，粒子でなくひもであることは，剛体棒の近似からのずれのようなものとして現れるはずである（図2）．ひもは輪ゴムのように振動することができるので，振動によるエネルギーを持ち得る．振動は直線近似からのずれであり，それを測定することができれば，粒子が実は小さなひもであることが分かるはずなのである．

*1） よくあるジョークの一つに，次のようなものがある．「物理学者に，牧場にいる牛について尋ねてみた．彼らはこう答えた：まず牛を球で近似したとしよう．」

*2） 超弦理論とブレーンの入門書として，拙著[1]を挙げておく．

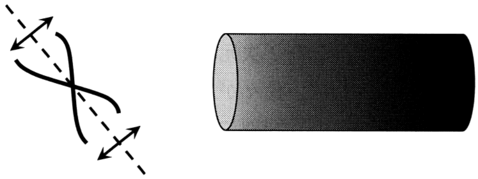


図 2　左：剛体棒（点線）を中心として自由に振動するひも．右：2 次元空間のうち，1 次元をコンパクトした場合．

このことを運動方程式と次元の簡素化という観点から見てみよう．自由運動する点粒子の運動方程式は

$$0 = m\frac{d^2}{dt^2}x(t). \tag{1}$$

すなわちニュートンの運動方程式の $F = ma$ で力をゼロとしたものである．解は等速直線運動で

$$x(t) = c_1 t + c_2 \tag{2}$$

となる．粒子の方程式には時間依存性しかないが，ひもの場合は，ひもに沿った「隠れた」次元があり，その方向に沿ったひも上の座標を σ とすると，運動方程式は波動方程式

$$0 = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2}\right) X(t,\sigma) \tag{3}$$

となる．有限の長さのひもなら $0 < \sigma < \pi$ などととることができ，運動方程式の解は

$$X(t,\sigma) = c_1 t + c_2 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \sin(nt+\theta)\cos n\sigma \tag{4}$$

である（自由端境界条件を課した）．a_n はまさにひもの振動を与える部分であるが，重要なことは，もし $a_n = 0$ であれば，解は完全に (2) 式と一致することである．すなわち，振動がなければ，ひもは粒子と同じになり，区別がつかない．まさに先ほどの次元還元である．言い方を変えれば，依存性 $\partial/\partial\sigma$ がなければ，運動方程式 (3) は点粒子の運動方程式 (1) に戻るのである．

それでは，点粒子であると考えている物体が実はひもであると観測で結論づけるにはどうすれば良いか．それには，運動の違いを見れば良いのである．もし a_n がゼロでなければ，運動方程式 (3) の第二項がゼロでなくなる．（ハミルトニアンに直せば）この寄与はひものエネルギーとして付加されるので，あたかも粒子の質量（内部エネルギー）がその分増えたかのように見えるはずである．さらに，ひもを量子力学で取り扱うと，a_n が量子化されるため，増える質量は離散化される．つまり，とびとびの質量スペクトルが現れるのである．

粒子を見るという立場からは，様々な質量を持った粒子が多種類存在しているようにしか見えない．それらの存在をまとめあげると，粒子がひもであるという証拠となるのである．先の例では，直方体の先を目で確認しなくても，次元還元した後の運動方程式の解からのずれを測定すれば，直方体の先がどのように切れているかを観測できたことになったわけであるが，今の場合は，ひもが伸びている場面を直接見なくても，質量のスペクトルを見れば粒子がひもであることが分かるのである．隠れた 1 次元 σ の観測はこのように行われるはずである．

実際に観測されている素粒子の質量スペクトルは，単純なひもの振動から得られるスペクトルとは異なっている．従って，素粒子がひもであると主張できる観測的事実はない．しかし，超弦理論の直接観測がどのように行われるか，そして隠れた 1 次元との関係は分かっていただけただろうか．

3.2 高次元が 3 次元に見える：超弦理論とコンパクト化

超弦理論には，別の種類の「隠れた次元」が存在していることを見ていこう．

非常に興味深いことに，結合が弱い超弦理論では，ひもが伝播する空間の次元が自動的に決まってしまう．ある種の仮定を置くと*3)，超弦理論の場合，空間の次元が 9 であると決まってしまう．では，粒子がひもであるという可能性は，この「9 が 3 ではないという矛盾」から潰えてしまうのであろうか？

じつは，この問題も，次元をどのように観測するかという問題と関連している．先のひもと粒子の関係を思い起こしてみよう．a_n がゼロであれば，ひもは粒子と同じように振る舞っているのである．従って同様に，我々の空間が 3 次元のように見えていても，それは a_n がゼロであるといった特殊な状況に対応しているだけなのかもしれない．

ひもの波動方程式 (3) の例を頼りに，9 次元と 3 次元の関係を論じてみよう．9 次元空間に時間を加えた 10 次元時空では，相対論的なスカラー場の運動方程式は波動方程式

*3)　例えば，ローレンツ対称性が時空に存在しているという，素粒子論では常に置かれる仮定など．

$$0=\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^{9}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^2+m^2\right)\phi(t,x^j) \qquad (5)$$

で与えられる*4)．m はスカラー場が表す粒子の質量である．さて，9 次元空間のうち，6 次元部分を丸く丸めてみたとしよう（図 2 を参照）．丸めるということは，

$$\phi(t,x^{1,2,3},x^I+2\pi R^I)=\phi(t,x^{1,2,3},x^I) \qquad (6)$$

という付加的条件を置いて，ϕ を $x^I(I=4,\cdots,9)$ 方向にぐるっと一周させても元に戻ってくるようにしておくということである（ここで R^I は丸める円の半径である）．これを**コンパクト化**と呼ぶ．

付加的条件を満たす周期関数は三角関数で基底を張ることができるので，

$$\phi=\sum_{\{s_I\}}\phi_{s_4,s_5,\cdots,s_9}(t,x^{1,2,3}) \times\prod_{I=4}^{9}\cos(s_I x^I/R^I+\theta_I) \qquad (7)$$

のように展開できる．ここで s_I は整数である．展開した表式を，(5) に再代入してみると

$$0=\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^2+\tilde{m}^2\right)\phi_{s_I}(t,x^{1,2,3}),$$
$$\tilde{m}^2=m^2+\sum_{I=4}^{9}\frac{s_I^2}{(R^I)^2}$$

を得る．この波動方程式は，3 次元空間のスカラー場で，質量が $\tilde{m}$ となっている波動方程式とまさに同一である．

すべての s_I がゼロのときは，もともとの質量 m を持ったスカラー粒子であるが，それに加えて，無限種類のスカラー粒子が現れることが分かる．しかもその粒子の質量スペクトルは特徴的な $\tilde{m}$ にまとまっている．ここでも再び，高次元空間を直接見なくても，方程式からの系統的なずれを観測することで，「隠れた次元」が見えるのである．

結合の弱い超弦理論が現実の自然を記述していると考えたい理論的な理由はいくつかあり*5)，それに従うとすると，必然的にコンパクト化された空間が高次元として存在しなくてはならない．それがもし実際に存在するならば，それは上記のように，素粒子の質量スペクトルとして観測されるはずである．知られている素粒子には上記のような質量スペクトルの系統性は見当たらない．一方，未知の素粒子が新たに発見された場合に，まずその質量が注目される理由の一つは，上記のような理由である．

もちろん，超弦理論に依拠せずとも，高次元時空は可能である．素粒子の標準模型の拡張として，現在盛んに高次元模型が研究されている．近年稼働を始めた，ヨーロッパ原子核研究機構（CERN）の大ハドロン衝突器（LHC）は，人類未踏のエネルギーを発生させることができるため，新しい素粒子を生成する可能性が高いと考えられている．新素粒子の発見が，隠れた次元の発見に繋がるかもしれない．

4. ホログラフィー：クォークと隠れた高次元

ここまでの話では，空間次元が実際に存在していてもそれが観測されないような場合，もしくは，隠れた次元をいかに観測するか，という話であった．次元は既に与えられたものであり，隠れた次元があれば，それがどのように観測に現れ得るかを，簡単な 2 つの例を元に解説してきた．

しかし，超弦理論の近年の数学的進展は，隠れた次元について，驚くべき新事実を提供している：次元は与えられるものではなく，「出現する概念」であるのだ．ホログラフィック原理と呼ばれる新しい数学的対応原理を用いて，素粒子のうちクォークやグルーオンと呼ばれる粒子の物理（「QCD：量子色力学（quantum chromodynamics）」）が，高次元の重力理論を用いて解析されている．この新しい手法は「ホログラフィック QCD」と呼ばれ，素粒子論・ハドロン物理学において広汎に用いられるようになってきた．以下では，隠れた次元に関する新しい考え方について，述べていこう．

4.1 ブラックホールと隠れた次元

ホログラフィック QCD と呼ばれる手法はこの 5 年ほどの大きな学術的進展であるが，その起源は古く 1972 年に遡る．J.D. Bekenstein は，ブラックホールのエントロピー S，すなわち情報量が，ブラックホールの事象の地平面の面積 A に比例することを発見した[2]：

$$S=\frac{k_{\mathrm{B}}c^3}{4(h/2\pi)G}A. \qquad (8)$$

*4) この波動方程式（場の理論の運動方程式と呼ばれる）に馴染みの薄い読者は，ϕ を場所 x^i，時刻 t における水面波の高さと想像してみよう．

*5) 例えば，重力を量子化する際の繰り込み可能性の困難を解消する理論として，超弦理論が考えられている．

ここで G は重力定数，h はプランク定数，k_B はボルツマン定数，c は光速である．導出は省略するが[*6]，この式が意味する物理は深遠である．通常，エントロピーは体積に比例するはずであるが，A という面積に比例しているのである．あたかも，ブラックホール内に蓄積された情報は，事象の地平面上に貼り付いてしまっているようである．このように，一般に異なる次元の物理学が等価である場合を**ホログラフィー**もしくは**ホログラフィック原理**と呼ぶ．

体積と面積では次元が異なっている．ブラックホールという，3 次元空間を曲げる重力の物体が，あたかも 2 次元面上に蓄積された情報を持っているように見えているのである．「隠れた次元」の登場である．

ブラックホールのエントロピーの公式は，ブラックホール内に蓄積された情報量を計算して導出されたものではなかった．ブラックホールの持つ情報を知るためには，ブラックホールが何でできているかを知る必要があるが，ブラックホールは事象の地平面内に，物理法則が破綻する点である特異点を持つため，その性質を物理的に解析することができなかったためである．

超弦理論は，ブラックホールの微視的な状態の数え上げを可能にした．1996 年に A. Strominger と C. Vafa は，D ブレーンと呼ばれる超弦理論の物体に基づいた仮想的なブラックホールを構成して，ブラックホールの状態数の数え上げを行い，それが公式 (8) と完全に一致することを示した[3)]のである．D ブレーンは単純な物体であり，定義は単に，超弦理論においてひもの端がくっつくことができる部分空間のことである (図 3)．9 次元空間の中の部分空間を考えれば，それが D ブレーンになる．そのように単純な D ブレーンが，ホログラフィーすなわち隠れた次元の基礎を与えることになったのである．

D ブレーン上の状態数とは，D ブレーンにくっついているひもの状態数と同じである．Strominger と Vafa の発見の直前に敷かれた重要な布石は，この D ブレーンがブラックホールと同定できるという J. Polchinski の考察であった[4)]．D ブレーンにはひもが端を置くことができる，という定義から演繹すると，D ブレーンは閉じたひもを放出することができることが示される．一方，超弦理論では閉じたひもの振動励起の一つ（3.1

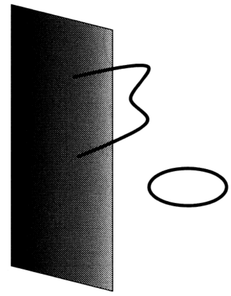


図 3　D ブレーンに端を置く開いたひもと，D ブレーンから放出される閉じたひも．閉じたひもは，開いたひもが変形して飛び出すことができる．

節を参照）は重力を伝達する素粒子である重力子と同定できる．従って，D ブレーンは質量を持つ薄い物体であり，ブラックホールと同定できるのである．

4.2 クォークの物理と隠れた次元

ブラックホールの隠れた次元と，我々の良く知る陽子・中性子は，全く異なる物理で支配されていると考えるのが自然であろう．陽子・中性子はクォーク・グルーオンと呼ばれる素粒子で構成されている複合粒子である．このような複合粒子は何百種類も観測されており，そのすべてがクォーク・グルーオンの複合粒子（「ハドロン」と呼ばれる）であると考えられている．クォーク間に働く力はグルーオンによって媒介される「強い相互作用」であり，クォークとグルーオンを司る素粒子理論「QCD（量子色力学)」が確立している．クォーク間の力は強すぎるため，クォークは単体では観測されておらず（クォークの閉じ込め)，形成されている複合状態の性質は複雑である．その計算にはスーパーコンピュータの手助けが必要なほどである．

ホログラフィック QCD とは，クォークとグルーオンの QCD を，高次元ブラックホールに焼き直して計算する手法である[*7)]．驚くべきことに，スーパーコンピュータでなければ計算が難しかった陽子・中性子などハドロンの性質が，高次元ブラックホールにホログラフィー原理で焼き直すと，紙と鉛筆で計算できるのである．ブラックホールの隠れた次元が，まさに我々の良く知る素粒子に適用されたのである．

その仕組みはじつのところ単純であり，前節の D ブレーンを用いている．D ブレーンにくっついている開いたひもには振動モードがあるが，その振動モードがうまく素粒子クォークとグルーオンとなるように，D

*6)　熱力学第二法則によると，エントロピーは時間経過において減ることはない．一方，ブラックホールの事象の地平面の面積も，ブラックホールは物質を吸い込むだけであるので，時間経過で減少することはない．

*7)　超弦理論におけるホログラフィック原理は「AdS/CFT 対応」とも呼ばれ，1997 年に J. Maldacena が提唱した[5)]．

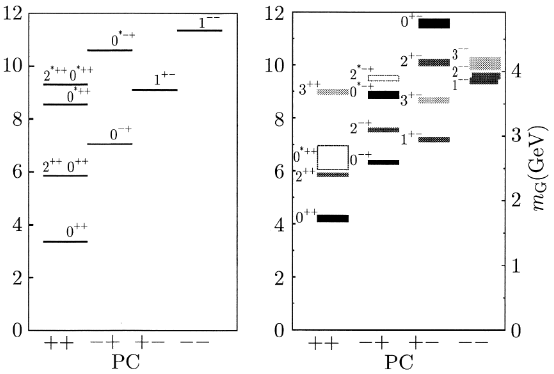


図4　QCD の素粒子グルーオンの複合状態「グルーボール」の質量スペクトル．左：ホログラフィック QCD を用いた，高次元重力理論による計算結果[6)]．右：スーパーコンピュータによる計算結果[8)]．「PC」はそれぞれパリティと荷電共役変換性を示す．右縦軸の単位は GeV（ギガ電子ボルト）．（左右では考慮している理論のゲージ群が異なる．）

ブレーンの種類を工夫して組み合わせておく．すると形式上，QCD のクォークとグルーオンそしてそれらの相互作用が D ブレーン上に実現する．QCD はもちろん 3 次元空間上の理論であるので，D ブレーンの広がっている空間次元も，3 次元空間となるようにしておく．そこで，ホログラフィック原理を適用する．組み合わさった D ブレーンに等価なブラックホール時空を考えるのである．ブラックホール時空はもちろん，超弦理論の 9 次元空間（+時間 1 次元）となっており，高次元である．

クォークやグルーオンの複合状態を調べたければ，等価な高次元ブラックホール時空において，それら複合状態に対応する閉じたひもの振動モードを調べることになる．この計算は紙と鉛筆で進めることができる．素晴らしいことに，計算された複合状態の質量スペクトルは，まさにスーパーコンピュータで計算された QCD の質量スペクトルに傾向が一致していた（図 4）[6〜8)]．

5. 隠れた次元は，隠れているのか？

ホログラフィック QCD が教えてくれたのは，クォークとグルーオンの複合状態の質量スペクトルが，まさに高次元空間内の閉じたひもの振動モードとして表されるということであった．陽子や中性子などのハドロンに，新しい意味付けをしたことになる：ハドロンは曲がった高次元時空を運動するひもと同定できるのである．

さて，どちらの描像が正しいのであろう？ ハドロンは，3 次元空間を運動するクォークの複合状態なのか，それとも高次元空間を運動するひもなのか？ これまでの解説からお分かりの通り，現在の物理学が提供している回答は「両方正しい」である．これら 2 つの見方は，一つの物理現象の等価な（しかし全く記述方法が異なる）見方なのである．

従って，空間の次元は確定した概念ではなく，「出現する」概念である．物理現象に付随した，副次的な概念である．隠れた次元は，隠れているのではなく，むしろ次元という概念自体が，我々が思っているより確固としていないのである．

現代物理学の最先端は，驚くべき時空描像を提供してくれている．「隠れた次元」の探求は，これからも続く．

参考文献

1) 橋本幸士『D ブレーン：超弦理論の高次元物体が描く世界像』（東京大学出版会，2006）．
2) J.D. Bekenstein, "Black holes and entropy", *Physical Review D***7** (1973) 2333–2346.
3) A. Strominger and C. Vafa, "Microscopic Origin of the Bekenstein-Hawking Entropy", *Physics Letters B* **379** (1996) 99–104.
4) J. Polchinski, "Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond Charges", *Physical Review Letters* **75** (1995) 4724–4727.
5) J.M. Maldacena, "The Large N limit of superconformal field theories and supergravity", *Advances in Theoretical and Mathematical Physics* **2** (1998) 231–252.
6) R.C. Brower, S.D. Mathur, C.-I Tan, "Glueball spectrum for QCD from AdS supergravity duality", *Nuclear Physics B* **587** (2000) 249–276.
7) C. Csaki, H. Ooguri, Y. Oz, J. Terning, "Glueball mass spectrum from supergravity", *Journal of High Energy Physics* **9901** (1999) 017.
8) C.J. Morningstar and M.J. Peardon, "The Glueball spectrum from an anisotropic lattice study", *Physical Review D* **60** (1999) 034509.

（はしもと・こうじ，理化学研究所仁科加速器研究センター）

隠れていた場
ゴースト場の凝縮機構

向山 信治

1. はじめに

アインシュタインの**相対性理論**は，量子論とともに，現代物理学の金字塔といえる．実際，様々な実験・観測が，相対性理論の正しさを実証している．そして，**ローレンツ対称性**は，その根源ともいえる性質である．しかし，後述するように，ローレンツ対称性を実験・観測と矛盾しない範囲で破ることで，ダークエネルギー・ダークマターなどの宇宙の謎や，量子重力理論の構築などの物理学の問題に対して，何らかのヒントが得られるかもしれない．また，仮に自然界でローレンツ対称性が厳密に保たれているとしても，それを確かめるには，ローレンツ対称性が破れた場合にどのような違いが生じるか理論予言をし，実験・観測によって検証するしかない．

一般に，対称性を破る方法には，大きく分けて2種類ある．一つは，理論は対称性を持つが状態がそれを破る場合，つまり**自発的対称性の破れ**である．もう一つは，理論そのものが対称性を破る場合である．本稿では，前者の最もシンプルな例として，**ゴースト場の凝縮機構**[1]（以下，ゴースト凝縮）を紹介しよう．

2. 宇宙の暗黒成分か重力の変更か？

そもそもなぜ，ゴースト凝縮というアイデアが生まれたのだろうか？ それを理解するには，宇宙には暗黒成分がある（と思われている）ことを知っておく必要がある．

宇宙の9割以上は，私たちの知らないエネルギーと物質で満ちているのかも知れない．こう聞いて，どう思うだろうか？ 実際のところ，近年の超新星や宇宙背景輻射の観測は，現在の宇宙の加速膨張，そして負の圧力を持ったエネルギーの存在を強く示唆している．また，銀河が回転によってばらばらになってしまわないためには，見えない物質が必要と考えられている．これらのエネルギーと物質は，それぞれダークエネルギー，ダークマターと呼ばれているが，私たちはそれらが何であるかを知らない．

ここで物理学の歴史を振り返ってみると，良く似た状況があったのに気づく．19世紀，惑星の軌道の精密な観測により，水星が奇妙な動きをしていることが発見された．これは近日点移動と呼ばれる現象で，ニュートンの万有引力の法則と運動方程式を駆使して計算をしても，どうしても説明できなかった．そこで，人々は見えない惑星，言わば“ダークプラネット”，を導入して，この現象を説明しようとした．水星より内側に軌道を持つとされた，このダークプラネットはヴァルカンと呼ばれ，何と，発見したと主張した人もいたそうである．しかし結局のところ，この主張は正しくなく，ヴァルカンが発見されることはなかった．本当の答えはダークプラネットではなく，“重力理論を変える”ということであった．つまり，“ニュートン

力学から一般相対性理論へ" 新しい重力理論の幕開けである．アインシュタインの一般相対性理論は，ダークプラネットに代わって惑星の近日点移動を見事に説明したのだ．その後，アインシュタインの理論は次々に成功を収め，ニュートン力学に変わる，新しい重力理論としての地位を獲得したのであった．

この歴史的事実を鑑みれば，少なからぬ研究者が「ダークエネルギーとダークマターを導入する代わりに，一般相対性理論を変更することはできないか？」と考えるのも，自然に思えてくるだろう．ダークエネルギーとダークマターは，アインシュタインの一般相対性理論を用いて観測結果を説明しようとすると絶対に必要だが，もしも一般相対性理論が変更を受けるのなら，もしかすると必要ないのかもしれない．私も，2003年，N. Arkani-Hamed，H.-C. Cheng，M. Lutyと共に，一般相対性理論を長距離で変更しようと考え始めた．

しかし，これは非常に難しい問題だった．加速膨張宇宙や銀河の回転を説明できるか否かを問う以前に，長距離で重力の振舞いを変えるということが，そもそも理論的に可能なのかさえ分からない状態であった．実際それまで，一般相対性理論を長距離で変更する試みが数多くなされたが，どれも成功しなかった．先人たちも，massive重力理論[2)]やDGP（Dvali-Gabadadze-Porrati）ブレーンモデル[3)]等を提案したが，どれも上手くいかなかったのである[4,5)]．一般相対性理論はあまりにも精巧に作られているため，それを長距離で変更すると，そのしわ寄せが必ずどこかに現れて，理論としてつじつまが合わなくなってしまうようにさえ思えた．

3. ヒッグス機構からゴースト場凝縮へ

困難に直面したときには，周辺分野に似た状況がないか問うてみるのが有益なことがある．そこで私たちは，対称性を自発的に破って力の法則を変えるのに使われる，ヒッグス機構と呼ばれるゲージ場の理論の手法に着目した．時空の座標変換をゲージ変換とみなせば，一般相対性理論も一種のゲージ理論と考えることができるから，何らかのヒントが得られるかも知れないと思ったのだ．そこで，以下ではまず，ゲージ場の理論とヒッグス機構について簡単に述べておこう．

ゲージ場の理論は，素粒子の標準模型の根底を支える基礎理論である．その利点の一つとして，許される相互作用の形がユニバーサルに決定され，結果として理論が強力な予言力を持つ，という点が挙げられる．例えば，光子の質量は禁止され，零であることが量子論レベルで保証される．つまり，電磁場が一定速度（光速）で伝播することが，ゲージ対称性によって保証されているのだ．また，質量が零の場によって媒介される力は一般にガウス則（力 $\propto$ 距離の逆自乗）に従うので，電場がガウス則に従うことも分かる．

しかし，ゲージ理論を適用すべき自然界には，光子が媒介する電磁気力だけでなく，計4つの力が存在する．ここでは，原子核のベータ崩壊等の原因となる，弱い力について考えてみよう．弱い力は電磁気力よりもはるかに弱く，非常に短い距離の間でのみ働く．つまり，力 $\propto$ 距離の逆自乗ではない．一方，上述のように，（単純に）ゲージ対称性を課すと，力を媒介するベクトル場（ゲージ場）の質量が零であること，そして力がガウス則に従うことが導かれる．だから，一見，ゲージ理論は弱い力を記述するのに不向きではないかと思えるかもしれない．

このジレンマを見事に解決するのが，ヒッグス機構である．ヒッグス場と呼ばれる場が凝縮する（宇宙を満たす）と，ゲージ対称性の少なくとも一部が自発的に破れ，ゲージ場が質量を持つことが許される．重要なことは，対称性の破れのパターンによって，**低エネルギー有効理論**の構造が決まるということである．つまり，相互作用がユニバーサルに決まるという，ゲージ理論の利点はそのまま維持されることになる．ワインバーグとサラムが，電磁気力と弱い力を統一して大成功をおさめたのも，このヒッグス機構のおかげである．

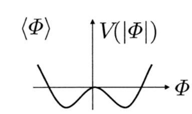
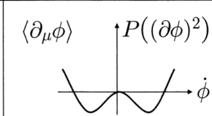
私たちは，ヒッグス機構のような，自発的対称

性の破れのアイデアを一般相対性理論に適用すれば，直面していた困難を解決できるかもしれないと考えた．実際，一般相対性理論では重力場の質量は零で，重力ポテンシャルは遠方でガウス則に従う．私たちは，ある意味，どうやって重力場に質量（のようなもの）を与え，ガウス則を変更するのかに四苦八苦しているのだ．私たちは，長い試行錯誤の末，ゴースト凝縮という考えにたどり着いた．ゴースト凝縮では自発的対称性の破れを使っているので，ヒッグス機構と同様，低エネルギー有効理論の構造を，対称性とその破れのパターンだけで決定できる．

ここで，もう少し具体的に，どうやって自発的対称性の破れのアイデアを一般相対性理論に適用したかを述べておこう．一般相対性理論で本質的な対称性は，一般座標変換に対する不変性である．だから，一般相対性理論から導かれる重力を変更するには，この対称性を破る必要がある．ただし，私たちの住む宇宙は大スケールでは空間的に一様等方なので，空間方向の対称性は破らないほうが無難だ．そこで，時間座標の変換に対する不変性を破ることを考える．実際の宇宙は膨張しており，時間方向の対称性は破れているとも言える．ただし，ここでは，背景時空が完全に平坦であっても時間方向の対称性が破れているような状態を考える．さもなければ，通常考えられている宇宙の状態と何ら違いがなくなってしまう．

では，ゴースト凝縮の基本的アイデアについて，ヒッグス機構と比較しながら説明しよう（表１参照）．ヒッグス機構では，対称性を自発的に破るため，対称性の変換で不変でない真空期待値を場に持たせる．ここでは，時間座標の変換に対して不変でない期待値を場に持たせる必要がある．最も単純には，スカラー場（以後 ϕ）の期待値に一定の時間微分 $\langle\dot{\phi}\rangle$ を持たせれば良さそうである（表 1）．これを，後述する理由により，私たちはゴースト凝縮と呼ぶことにした[1]．ゴースト凝縮を実現するには，ポテンシャルは平らでなければならない．なぜなら，ϕ を一定速度で時間変化させると，ポテンシャルが平らでなければエネルギー密度が時間

表１ 通常のヒッグス機構とゴースト凝縮の比較．左側の V' と V'' はポテンシャル V を Φ で微分したもの，右側の P' と P'' は運動項 P を $(\partial\phi)^2$ で微分したものである．

	ヒッグス機構	***ゴースト凝縮***
オーダーパラメータ		
不安定性	タキオン $-\mu^2\Phi^2$	ゴースト $-\dot{\phi}^2$
凝縮点	$V'=0,\ V''>0$	$P'=0,\ P''>0$
自発的に破る対称性	ゲージ対称性	時間座標の変換に対する不変性
変更する力	ゲージ場による力	重力
力の法則	湯川型	ガウス型＋振動型

とともに変化してしまい，平坦な時空が解として許されないからだ．運動項 P は，表１右上のような形を考える*1)．原点近くで運動項が減少することから，$\dot{\phi}=0$ は不安定であることが分かる．これは，ゴーストと呼ばれる，負の運動エネルギーを持つ摂動モードに起因する不安定性である．ゴーストがあると，エネルギーを保存しながら（正エネルギーの）通常の粒子と（負エネルギーの）ゴーストを対生成できるので，真空が不安定になってしまう．また，確率が負の状態が現れるという量子論上の問題も生じる．だから，ゴーストを含む背景においては，まともな有効場の理論を構成することができない．一方，P の谷の底では，有効理論を何の問題もなく構成できる．これは，ゴースト場が凝縮して，系を安定化させたと考えることもできるかもしれない．ゴースト凝縮と呼ぶことにしたのは，このような解釈による．凝縮点では $\langle\dot{\phi}\rangle\neq 0$ なので，時間座標の変換に対する不変性が自発的に破れ，結果として重力が変更を受けることになる．

ゴースト凝縮では，ガウス（ニュートン）型の重力に，長い時間かけて振動が加えられる．対称性の破れのスケールを M とすると，空間的振動の

---

*1）実際には，$(\Box\phi)^2$ のような項も必要であり，後述 (3) や (4) はその効果も含んでいる．したがって，ゴースト凝縮の理論は，いわゆる k-inflation[6] とは異なる．

スケールは $r_0 \sim M_{Pl}/M^2$，時間発展のスケールは $t_0 \sim M_{Pl}^2/M^3$ である．例えば，$M \sim 10\,\mathrm{MeV}$ とすると，r_0 は 1000 km 程度，t_0 は現在の宇宙年齢程度となる．だから，長時間での変更と呼ぶのが適切かもしれない．M を小さくすると t_c が長くなるので，決まった時間内に生じる変更の度合いは小さくなる．より詳細には非線形の効果を考慮する必要があり，ここでは説明を割愛するが，M が 100 GeV よりも十分小さければ実験や観測と矛盾しないことを示せる[7]．さらに，もしも M がちょうど 100 GeV 程度なら，将来の観測可能性についての興味深い予言ができる．

4. 低エネルギー有効理論

この節では，少し専門的になるが，凝縮相（つまり表 1 の P のグラフで谷の底）において，振舞いのよい有効場の理論を構成することができることを示そう．以下の 2 つの仮定を満たす解が存在することを想定し，その解の周りの摂動として，重力を記述することにする．

1. スカラー場の微分が，零でない一定の真空期待値 $\langle \partial_\mu \phi \rangle$ を持ち，それが時間的であるとする．
2. 背景時空はミンコフスキー時空であるとする．

驚くべきことに，これだけの仮定から，低エネルギー有効理論の構造が決まってしまう．つまり，どんな基礎理論から出発しても，対称性の破れのパターンさえ同じであれば，低エネルギー有効理論は同じ構造を持つことになる．

まず，最初の仮定から，時空の座標変換によりスカラー場 ϕ そのものを時間座標に選ぶこと，つまり $\phi = t$ とすることが可能である．これは ϕ の摂動 $\delta\phi$ を零とすることに対応し，今後，このゲージ（座標）をユニタリゲージと呼ぶことにしよう．ユニタリゲージの条件を変えない座標変換は，空間座標の変換 $\vec{x} \to \vec{x}'(t, \vec{x})$ だけであり，これが破れずに残っている対称性だ．次に，計量を $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ のように展開する．ここで，$\eta_{\mu\nu}$ は第 2 の仮定でのミンコフスキー背景時空の計量，$h_{\mu\nu}$ はその周りの線形摂動である．すると，一般の微小座標変換（$x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu$）に対する良く知られた公式は

$$\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu \tag{1}$$

となる．ここで，ξ^μ は 4 次元ベクトルで，添字の上げ下げは背景のミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$ とその逆行列 $\eta^{\mu\nu}$ で行う約束にする．破れずに残っている対称性の変換，つまり空間座標の変換は，空間成分 $\xi^i (i = 1, 2, 3)$ によって生成され，

$$\delta h_{00} = 0,\ \delta h_{0i} = \partial_0 \xi_i,\ \delta h_{ij} = \partial_i \xi_j + \partial_j \xi_i \tag{2}$$

となる．低エネルギー有効理論は破れずに残っている対称性を尊重しなくてはならないので，ユニタリゲージでの有効作用は，この変換で不変な項のみで書けるはずである．逆に，この変換で不変な項は何でも許され，したがって原則としてすべて含まなければならない．また，2 番目の仮定から，有効作用は摂動 $h_{\mu\nu}$ の 2 次以降から始まることに注意してほしい．なぜなら，摂動の 1 次の項は背景に対する運動方程式を与え，それは仮定により零であるからだ．一旦ユニタリゲージでの有効作用が求まると，一般の座標での有効作用を求めるのは簡単である．すぐ後で具体的に見るように，ユニタリゲージから外れるような座標変換，つまり ξ^0 によって生成される時間座標の変換を施すだけである．一般に，対称性が自発的に破れると**南部–ゴールドストーン（Goldstone）・ボソン**（以後 NG ボソン）と呼ばれる場が現れるが，今考えている状況では，ξ^0 こそが NG ボソンである．物理的には，この NG ボソンはスカラー場の摂動とみなせる．ユニタリゲージでは $\delta\phi = 0$ だが，そこに ξ^μ によって生成される微小座標変換を施すと $\delta\phi = \xi^0$ となるからだ．したがって，ユニタリゲージでの有効作用を求めて時間方向の座標変換を施すだけで，NG ボソンの作用が重力場との相互作用も含めて求まってしまうということになる．

再びユニタリゲージでの有効作用に話を戻して，具体的に見ていこう．残った対称性を尊重す

る項として最初に思いつくのは，微分を全く含まない $\int dx^4 h_{00}^2$ であろう．実際，h_{00} は (2) で不変であるから，この項は有効作用中に許される．計量の他の成分からは，微分を含まない不変な組合せを作ることができないが，微分をとって $K_{ij} = (\dot{h}_{ij} - \vec{\nabla}_j h_{0i} - \vec{\nabla}_i h_{0j})/2$ のように組み合わせると不変になる．したがって，$\int dx^4 K^2$ や $\int dx^4 K^{ij} K_{ij}$ も許される．ここで，$K = K_i^i$ である．まとめると，ユニタリゲージでの低エネルギー有効作用は

$$I_{\pi=0} = I_{EH} + M^4 \int dx^4 \left\{ \frac{1}{8} h_{00}^2 - \frac{\alpha_1}{2M^2} K^2 - \frac{\alpha_2}{2M^2} K^{ij} K_{ij} + \cdots \right\} \quad (3)$$

となる．ここで，M は対称性の破れのスケールを表す質量の次元を持った量で，低エネルギー有効理論の強結合スケールでもある．したがって，有効理論の適用範囲では $\vec{k}^2 \ll M^2$, $\omega^2 \ll M^2$ でなければならない．また，$\alpha_{1,2}$ は $O(1)$ の無次元定数で，I_{EH} は通常のアインシュタイン–ヒルベルト作用である．

NG ボソンと解釈できる ξ^0 を，慣例に従って π と書くことにすると，一般の微小座標変換 (1) によって，$h_{00} \to h_{00} - 2\dot{\pi}$, $K_{ij} \to K_{ij} + \vec{\nabla}_i \vec{\nabla}_j \pi$ と置き換わる．したがって，この置き換えを (3) に施せば，NG ボソン π を含む低エネルギー有効作用が得られる．特に，計量の摂動を落として NG ボソンのみの有効作用を書けば，

$$I_{h=0} = M^4 \int dx^4 \left\{ \frac{1}{2} \dot{\pi}^2 - \frac{\alpha}{2M^2} (\vec{\nabla}^2 \pi)^2 + \cdots \right\} \quad (4)$$

となる．ここで，$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ である．これから，重力との相互作用を無視できる極限（つまり $M/M_{Pl} \to 0$）では，NG ボソンの分散関係が

$$\omega^2 = \frac{\alpha}{M^2} \vec{k}^4 \quad (5)$$

となることが分かる．一般には M/M_{Pl} は有限なので，重力場と NG ボソンとの最低次の相互作用が $(M^4/8)(h_{00} - 2\dot{\pi})^2$ から得られ，(5) は $O(M^2/M_{Pl}^2)$ の補正を受ける．結果，一般の場合の分散関係は

$$\omega^2 = \frac{\alpha}{M^2} \vec{k}^4 - \frac{\alpha M^2}{2M_{Pl}^2} \vec{k}^2 \quad (6)$$

となる．前節の最後で述べた t_0 や r_0 は，この分散関係下での ω^2 の最低値と，それを与える $\vec{k}^2$ の値を，それぞれ $-t_0^{-2}$ と r_0^{-2} とすれば評価できる．

以上で求めた有効作用の構造は，本節冒頭で述べた 2 つの仮定だけで決まっているので，M より低エネルギーでは量子補正に対して安定である*2)．

5. さいごに

特殊相対性理論が生まれて 100 年以上が経った今，その基礎となるローレンツ対称性は，現代物理学において最も重要な対称性の一つとして君臨している．一方，物理学の歴史において，P や CP 対称性など，過去には厳密に成り立っていると思っていた対称性が，実際には破れていたという例は少なくない．したがって，将来，ローレンツ対称性の破れが発見される可能性は否定できない．本稿では，ローレンツ対称性を自発的に破る理論としてゴースト凝縮を紹介し，その低エネルギーの有効理論の構造が，対称性の破れのパターンだけでユニバーサルに決まることを見た．以下では，その応用例や拡張理論などについて，いくつか簡単に考察しよう．

宇宙論への応用例としては，ダークエネルギー・ダークマターの代わりになる可能性や，インフレーションの起源になる可能性などが議論されている．特に，ゴースト凝縮によるインフレーション[8)]では，(5) で見たように揺らぎの分散関係が通常と異なるため，非線形性が通常よりも現れやすい．結果として，通常のインフレーションよりも大きなずれが期待できることになる．具体的に計算すると，このずれは，現在までの観測と矛盾するほどは大きくないが，近い将来観測できるレベルとなっ

---

*2) 厳密には，(3) や (4) の $\cdots$ に含まれる様々な項が，低エネルギーで無視できることを示さないといけない．これは，スケーリング次元の解析によって示すことができる[1)]．

ている．したがって，宇宙背景輻射の観測によりモデルの正否を判別できる可能性が十分あると考えられている．

また，ホログラフィック原理をテストする"実験場"として，ブラックホール時空におけるゴースト凝縮を考察する試みもされている．もしもホログラフィック原理が正しければ，ブラックホールは熱力学的性質を持つはずである．ゴースト凝縮によって熱力学的性質が台無しにならないかを調べることで，ホログラフィック原理の非自明な整合性チェックになるだろう．幸い，ブラックホールの熱力学的性質（特に一般化された第2法則）とゴースト凝縮との相性は良いようである[9]．

ゴースト凝縮を拡張した理論も，いくつか提案されている．まず，4節で構成した有効理論の背景時空を，一様等方な膨張宇宙に拡張することで，インフレーションの有効理論が提唱されている[10]．また，ゴースト凝縮では，暗にシフト対称性を仮定していたが，これをゲージ化したり[11]，ガリレオン対称性に拡張することで[12]，新しい理論を構成することができる．

本稿では，自発的にローレンツ対称性を破る場合だけを考察したが，もう一つの可能性として，高エネルギーで理論そのものがローレンツ対称性を破る場合もある．そのような理論の興味深い例としては，2009年にP. Hořavaが提唱した，（次数勘定）繰り込み可能な重力理論[13]がある．誌面数の都合上，解説は割愛させていただくが，新しい量子重力理論の候補と考えられており，また宇宙論的にも面白いことが色々とわかってきている．興味のある読者は，拙著レビュー[14]をご覧いただきたい．

ローレンツ対称性は，理論的要請というよりは，むしろ実験・観測による要請である．物理学は自然界を記述する法則を探求する学問であるから，実験・観測データを尊重すべきであることは言うまでもない．一方，最近，幾つかの実験でCPT対称性の破れが示唆されている[15,16]．まだ統計的には十分ではないが，もしもこれが本当であれば，自然界ではローレンツ対称性が破れているのかもしれない．なぜなら，局所的でローレンツ対称な場の理論は，必ずCPT対称性を持つからである．今後の実験データの蓄積が待たれる．

参考文献

1) N. Arkani-Hamed, H.C. Cheng, M.A. Luty and S. Mukohyama, *JHEP* **0405**, 074 (2004).
2) M. Fierz and W. Pauli, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **173**, 211 (1939).
3) G.R. Dvali, G. Gabadadze and M. Porrati, *Phys. Lett. B* **485**, 208 (2000).
4) N. Arkani-Hamed, H. Georgi and M.D. Schwartz, *Annals Phys.* **305**, 96 (2003).
5) M.A. Luty, M. Porrati and R. Rattazzi, *JHEP* **0309**, 029 (2003).
6) C. Armendariz-Picon, T. Damour and V.F. Mukhanov, *Phys. Lett. B* **458**, 209 (1999) [arXiv: hep-th/9904075].
7) N. Arkani-Hamed, H.C. Cheng, M.A. Luty, S. Mukohyama and T. Wiseman, *JHEP* **0701**, 036 (2007).
8) N. Arkani-Hamed, P. Creminelli, S. Mukohyama and M. Zaldarriaga, *JCAP* **0404**, 001 (2004).
9) S. Mukohyama, *Open Astron. J.* **3**, 30 (2010) [arXiv:0908.4123 [hep-th]].
10) C. Cheung, P. Creminelli, A.L. Fitzpatrick, J. Kaplan and L. Senatore, *JHEP* **0803**, 014 (2008) [arXiv:0709.0293 [hep-th]].
11) H.C. Cheng, M.A. Luty, S. Mukohyama and J. Thaler, *JHEP* **0605**, 076 (2006) [arXiv:hep-th/0603010].
12) A. Nicolis, R. Rattazzi and E. Trincherini, *Phys. Rev. D* **79**, 064036 (2009) [arXiv:0811.2197 [hep-th]].
13) P. Horava, *Phys. Rev. D* **79**, 084008 (2009).
14) S. Mukohyama, *Class. Quant. Grav.* **27**, 223101 (2010) [arXiv:1007.5199 [hep-th]].
15) P. Vahle, for the MINOS collaboration, "New results from MINOS," talk at Neutrino 2010, June 14–19, Athens, Greece (http://www.neutrino2010.gr/index.php). Also see the official MINOS webpage (http://www-numi.fnal.gov/) where all the results could be found.
16) T. Aaltonen *et al.* [CDF Collaboration], arXiv: 1103.2782 [hep-ex].

（むこうやま・しんじ，東京大学数物連携宇宙研究機構）

〈隠れた〉物理繁盛？

佐藤　文隆

1. ある〈隠れた〉正体探求「物語」

以下に長く引用した文章は，いわゆる科学論の論者の一人，ラカトッシュの「反証と科学研究プログラムの方法」（1974年）の一節である．

「この物語は，惑星の軌道のズレに関する空想上の物語である．アインシュタイン以前の時代の物理学者を考えることにする．そのような物理学者が，ニュートン力学と万有引力の法則，およびある受容される初期条件を使って，新しく発見された小さな惑星Pの軌道を計算した．このとき，計算された軌道から惑星がずれていたとしよう．このズレはニュートンの理論からは起りえないものであり，そのズレが正しければニュートンの理論は反駁されることになる，というように物理学者は考えるであろうか．いや違うであろう．物理学者は，まだ知られていない惑星P′が存在していて，惑星Pの軌道が計算値からズレたのだ，とまず最初に考えるであろう．物理学者は，この仮定された惑星の質量や軌道などを計算し，観測者にこの仮説をテストするよう求める．惑星P′はあまりにも小さすぎて，現在利用できるもっとも大きい望遠鏡でさえ観測できないとする．そうであれば，観測者はもっと大きな望遠鏡を作るために，研究助成金を要求するであろう．三年後に新しい望遠鏡が完成した．もしこれによって未知の惑星P′が発見されたとすれば，ニュートン力学の新しい勝利として，歓呼の声を上げてむかえられるであろう．しかし，実際にはそうではなかったとしよう．では，物理学者はニュートン理論や新しい未知の惑星という考えを捨てるであろうか．いや違う．つぎに物理学者は，宇宙塵の雲によって惑星がみえなくなっていると考えるであろう．物理学者は，この宇宙塵の雲の場所と性質を計算し，この計算をテストするために人工衛星を打ち上げる研究助成金を要求するであろう．人工衛星の機器（ある程度テストされた理論に基づく新しい機器）が推測された宇宙塵の雲の存在を記録すれば，その結果はニュートン理論の顕著な勝利として，歓呼の声を上げて迎えられるであろう．しかし，宇宙塵の雲もまた発見されなかったとしよう．では物理学者は，未知の新惑星とそれを隠している宇宙塵の雲という考えとともに，ニュートン理論を廃棄するであろうか．いや違う．次に物理学者は，宇宙塵の雲の近くの領域に，人工衛星の機器を狂わす磁場があると考える．新しい人工衛星が打ち上げられる．もし磁場が発見されれば，ニュートン理論はすばらしい成功を収めることになる．しかし，そうはならなかったとしよう．このことは，ニュートン理論の反証とみなされるであろうか．いやそうではない．また何らかの独創的な補助仮説が提案され…．そのうちに，この物語全体はほこりだらけの雑誌の中に葬り去られ，この物語は二度と再び語られはしないことになるであろう」[1)]

「空想上の物語」と言いつつも，この物語はどこか眼前で展開されている研究現場の光景とダブってくる真実味がある．最近は「研究助成金」獲得の広報のために，「物語」だけが露出して本体は結

局〈隠れた〉まま「二度と再び語られ」ない結末もある．

2. 幾重もの“防御帯”

この文章の論者は，科学にはあれもありこれもあるという相対主義に抗して，合理性に基づく真理構築が可能という説を唱えている．理論と現象のズレが発生したときの対処には，従来の理論セットのランク付けをして防御帯（ラカトッシュの用語）を築く．上の文章では，「ニュートン力学と万有引力」が最後の防御帯であり，そこに火の手が及ばぬように，「惑星P′」や「磁場」が臨時の防御帯として持ち出される．実際，海王星発見劇（1846年）は「惑星P′」防御帯の成果であったし，水星近日点移動は最後の防御帯の入れ替えで解決した．しかし多くの防御帯はズレを解消できないまま，「ほこりだらけの雑誌の中に葬り去られ」る．

実験だけでなく，ズレは理論の中のループホールや新しい原理の適用などでも発生し，一部の人には〈隠れた〉原理や存在がまざまざと迫ってくる．数理的合理性で強固に支え合い，容易に崩壊しない耐震補強工事のような動機もある．ズレを突き付けられて，どれだけドギマギするかデーンと構えるかには，定石はない．こうした様々な事情で，隠されていく“防御帯”が累々と積み上がっていくのは不可避だというわけである．

3. マッチポンプとしての防御帯

筆者の経験の中で一時は結構わくわくしたが消えていった話題に1967年のDickeの論文がある[2)]．スケール変換の対称性からするDirac，Jordan，Brans–Dicke（1961年）の一般相対論拡大の提案はあったが全然メジャーな話題でなかった．加速器が主導する素粒子物理と「宇宙の発見の時代」が学界のメジャーな話題で，どこでも実験技術の革新が研究を引っ張っていた．その流れで，一般相対論の検証実験も話題を提供していた．こうした話題のメジャーな展示場であった *Phys. Rev. Lett.* にDickeたちの「太陽扁平度と一般相対論」と題した論文が載った．太陽の形状が球からズレており，それによる四重極効果を考慮すると一般相対論効果で説明できていた水星近日点移動の説明ができなくなる．そこでスカラー場を含む修正一般相対論でズレをまたリカバーするという，複雑骨折的な「物語」である．

Dickeという人はロックインアンプというノイズを制御する測定装置を発明した人であり．この装置は化学やバイオを含む実験技術として普及しており，その貢献はノーベル賞ものだった言われている．そういう背景を知っていると，太陽扁平度測定に対する信頼も絶大なわけである．

また当時はDavisの太陽ニュートリノ測定値が太陽理論モデルと合わないことが話題になっていた．扁平の原因は内部の大域的運動を示唆するから，太陽モデル修正が必要で，中心部の温度や元素組成にも跳ね返る可能性もあり，ニュートリノにも影響する．ともかく「物理を知っている」とますます真実味が増してくる．筆者も研究室のコロキュームで紹介するために，宇宙物理の総合的勉強をさせて貰ったが，この話題は数年で消えていった．しかし，Brans–Dicke理論のほうはその後もメジャーな話題に止まった．

むかし政治の世界には，自分で火をつけて，それを消火して手柄にすることをマッチポンプと呼んでいた．「扁平度」騒動は，ロックインアンプ発明家としての輝けるキャリアーを活かしたマッチポンプ的なB–D理論キャンペーンとして，大成功だったのかもしれない．

参考文献

1) A.F. チャルマーズ著，高田紀代志，佐野正博訳『新版 科学論の展開』恒星社厚生閣，1985, 116p.
2) R.H. Dicke and H.M. Goldenberg, *Phys. Rev. Lett.*, **18**, 313–316 (1967).

（さとう・ふみたか，甲南大学，京都大学名誉教授）

隠れた変数
ベルの不等式など

井元　信之

1. はじめに

隠れた変数とは，量子力学における測定結果の確率的側面を古典論（決定論）的に説明するために導入された「未知の変数」である．このうち**局所隠れた変数**は**ベルの不等式**の検証実験により否定されている*1)．**非局所隠れた変数**は否定されてはいないがポピュラーでもない．確率解釈を押し通す標準解釈と，観測認識まで量子力学で押し通すエヴェレット理論はいずれも隠れた変数を仮定せず，後者は支持者漸増の傾向もある．このような観測問題マップ上で局所隠れた変数は絶滅し，非局所隠れた変数の支持者はジリ貧のように見える．

しかし，我々に見えなくても自然はベールの向こうの法則で応答しているという考えは，本質に迫る一つの方法論のように思われる．ベールの向こうを手前に引きずり出して我々が利用できるのでなければ意味がないという見方もあろうが，利用するばかりが考察の価値を決めるものでもない．これは新たな動向として発展途上であるが，本稿ではその辺まで話を持って行きたい．

2. 隠れた変数小史[1)]

光が粒子であるなら物質も波であろうというド・ブロイの考えに惹かれ，エルヴィン・シュレーディンガーはその波動が満たすべき方程式を見つけようとした．当初「波動関数は実数で実体を表すもの」と考え「波動方程式は相対論を満たすべき」と考え試行錯誤したが，水素原子のエネルギー準位をうまく説明できなかった．そこでニュートン力学や解析力学のように左辺を時間の一次微分とした．右辺を空間の二次微分のままとすると拡散方程式となり，時間反転対称性が破られることになって基本方程式としては具合が悪い．これは波動関数に作用する作用素が左辺は反エルミートで右辺がエルミートであることに起因する．そこで，同じく反エルミートである純虚数を左辺にかけてやれば解決する．こうして1926年に得られた「シュレーディンガー方程式」は非相対論的ではあったが，水素原子のスペクトルを見事に説明した．

しかし虚数を使った代償として波動関数 $\psi(\boldsymbol{r})$ は複素数値をとることとなった．$\psi(\boldsymbol{r})$ は一体何を表すのか？ 同じ1926年，マックス・ボルンは確率解釈を提唱した．すなわち $|\psi(\boldsymbol{r})|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ を「粒子が位置 $\boldsymbol{r}$ における体積素片で見出される確率」としたのである．以後これが標準的量子力学（コペンハーゲン解釈）になった．これに対するアルバート・アインシュタインの不快感は「神はサイコロを振らない」という言葉に集約されている．

サイコロを振らないのであれば，現象を確率論的に見せかけている「隠れた変数」が必要だろう．これに対しフォン・ノイマンは1932年の著書[2)]で隠れた変数はあり得ないと述べた．これは純粋状態を古典的決定状態の統計的混合で表すことは量子力学ではできないといった趣旨で，まず量子力学ありきの信念に近い[3)]．

デイヴィッド・ボームは標準量子力学の立場に立った名著『量子論』を1951年に完成したのち，異端ともいえる「量子ポテンシャル論」を1952年に提唱した．これは複素数である波動関数を実部（振幅）と虚部（位相）に分けて，実数値をとる2つの量の発展を見るようにしたところ，エネルギーとして通常の位置

*1)　解決すべき実験上の不備（loop hole と呼ばれる）がまだ残っているが，それを手当てしたらベルの不等式が破れなくなると思っている人はまずいないだろう．

エネルギーと運動エネルギーの他に第三の項を含む形式となり，その部分を「量子ポテンシャル」と呼んだユニークな理論である．初期状態の不確定性を統計的分布と思えば，振幅と位相が決まった点の軌跡を追えるように見える理論なので，確率現象を隠れた変数に還元したと言える．その第三項が遠くに瞬時に影響するように見えることがあるため，非局所隠れた変数の理論と言われる．本人は隠れた変数というより量子ポテンシャルと言いたいと言っている[4)]．

1964 年にジョン・ベルはいわゆる「ベルの不等式」（後述の **CHSH 不等式**を含め，以下ベル不等式と呼ぶ）を発見する．これは「局所隠れた変数」を仮定したとき，離れた二地点の観測値どうしに見られるある種の**相関**に成立すべき不等式である．つまりベル不等式の導出には量子力学は使われていない．この不等式の破れが実験によって確認された場合，この世は「局所隠れた変数」で説明できないことになる．そのときこの世を説明する理論の候補として，量子力学あるいはボームの理論あるいはその他の理論[*2)]が挙がってくる．

ベル不等式の検証実験はただちに始められたが，当時は破れていると結論した論文に混じって破れていないと結論した論文もあった．これらの実験は「二地点の測定は十分すみやかに行われ，光速以下で往き来する何ものも二地点の測定の独立性に影響を与えない」という非局所条件で行う必要があるが，それを満たすものは当時はなかった．

大きな進展は 1981 年，アラン・アスペによってもたらされた．彼は高速ポッケルスシャッターを用いて非局所条件を満足する実験を行い，「ベル不等式は破れている」と結論した．アスペの実験は実行前から知られ，期待がかかっていた．オルセーの L'Institut d'Optique にはそのときの装置が飾られ，来訪者の感慨を誘っている（2009 年確認）．

脚注 1 でも触れたが，それでもまだ「実験は不備では？」という声がある．一つは光子検出器の効率の問題である．光子検出器は百発百中反応するわけではなく，やってきた光子の何割かしかカウントしない．それを量子効率と呼ぶが，1982 年の時点ではその効率は低かった．これの何がいけないかというと，「たまたま数えられた光子は，何か未発見の物理法則によって，ベル不等式を破る統計を示すように背後で選ばれたのかもしれない．すべての光子を統計に参加させて相関を求めたらベル不等式は破れていないかもしれない」というわけである．これはただの意地悪な言いがかりというわけでもない．最も重要な根源的な問題を，未発見の物理があっても判定を保証しようというのだから，万全を期さなければならない（しかし脚注 1 に書いたように，万全を期してもベル不等式は破れているだろうとほとんどの人は思っている）．

3. 局所実在論

ベル不等式は量子力学とは無関係にたった 2 つの仮定—局所性と実在性—から導かれる．局所性とは「ある地点における観測の結果は他の地点における観測手段の選択や観測結果に影響を及ぼさない」とするものである．これは特殊相対論を認める限り，離れた 2 地点間を光が伝わるより短い時間内に観測を終えるよう実験を設定することで保証される．実在性とは「測定値は，観測するか否かに関わらず予め実在しているものであり，観測とはそれが何であるかを見て知ることである」とするものである．局所性と実在性の両方を正しいとする理論を**局所実在論**と言う．局所隠れた変数というのはまさにこれである．

ベル不等式はいろいろな教科書に数式的導出が出ているが，ベルがどのようにあの不等式を発想するに至ったかまでは，ベル亡き今となってはわからない．しかし後述の話につなげることを考え，単一光子の偏光に具体例を求めよう．

いま光子を同時に二個ずつ発生する光源があり，二個の光子は真逆の方向に地点 A と B に向けて一つずつ出射されるとする（図 1）．地点 A にいる観測者 Alice は，到着した光子 A の縦横偏光もしくは ±45° 偏光を観測し，地点 B にいる観測者 Bob も同様にする．縦横偏光は変数 X で表し，縦偏光なら $X=1$ とし横偏光なら $X=-1$ と定義する．同様に ±45° 偏光を変数 Y で表し，+45° 偏光なら $Y=1$ とし −45° 偏光なら $Y=-1$ とする．地点 A や B での測定を添え字で表すと，変数は $X_{\mathrm{A}}, X_{\mathrm{B}}, Y_{\mathrm{A}}, Y_{\mathrm{B}}$ の 4 つになる．これらがそれぞれ +1 もしくは −1 の測定値を示すわ

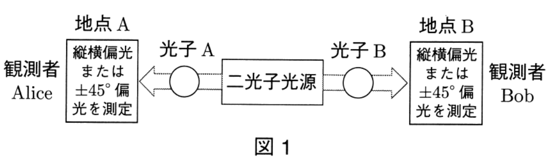


図 1

*2） 後述の Popescu–Rohrlich の箱などもその一例．

けである．

もし光源が，地点Aに向けて全くランダムに縦偏光または横偏光の光子を出し，それとは独立に地点Bに向けてランダムに縦偏光と横偏光の光子を出すようなものであったら，X_{A} はランダムに $+1$ または -1 の値をとるし，X_{B} も同様である．いまAliceとBobは X のみ測ったとし，それをあとで両者が持ち寄り，それぞれ対応する光子について $X_{\mathrm{A}}X_{\mathrm{B}}$，という積を作ったとすると，その結果もやはり $+1$ と -1 のランダムな列となる．その平均値を $\langle X_{\mathrm{A}}X_{\mathrm{B}}\rangle$ という記号で表すとすると，当然 $\langle X_{\mathrm{A}}X_{\mathrm{B}}\rangle = 0$ となる．±1 しかとらない変数でも，平均値はその間を取り得るわけである．そして $\langle X_{\mathrm{A}}X_{\mathrm{B}}\rangle = 0$ は「X_{A} と X_{B} は相関がない」ことを意味する．

もし光源が，地点Aに向けて縦偏光の光子を出したときは地点Bには必ず横偏光の光子を出し，逆に地点Aに向けて横偏光の光子を出したときは地点Bに必ず縦偏光の光子を出すようなものであったならば，観測者AliceとBobそれぞれ単独では先の例と同様に X_{A} が ±1 を，X_{B} が ±1 をランダムにとることを見るだろう．ところが両者が乱数表を持ち寄って相関を見ると事情が変わってくる．$X_{\mathrm{A}}X_{\mathrm{B}}$ という積は常に -1 になるので，その統計平均をとると $\langle X_{\mathrm{A}}X_{\mathrm{B}}\rangle = -1$ すなわち「X_{A} と X_{B} は完全な負の相関を有する」ことになる．こうして今度の光源は先のものとは異なるということにAliceとBobは気がつくであろう．

次に変数 Y まで入れて少しだけ実験を複雑にしてみよう．変数が4つなので，2つの変数の相関は $\langle X_{\mathrm{A}}Y_{\mathrm{A}}\rangle$, $\langle X_{\mathrm{B}}Y_{\mathrm{B}}\rangle$, $\langle X_{\mathrm{A}}X_{\mathrm{B}}\rangle$, $\langle X_{\mathrm{A}}Y_{\mathrm{B}}\rangle$, $\langle Y_{\mathrm{A}}X_{\mathrm{B}}\rangle$, $\langle Y_{\mathrm{A}}Y_{\mathrm{B}}\rangle$ の6種類がある．ここで「同一地点で X と Y を同時に測定することはしない（あるいはできない）」という約束事を導入しよう．すると最初の2つの相関は話の埒外になるので，

$$\langle X_{\mathrm{A}}X_{\mathrm{B}}\rangle,\quad \langle Y_{\mathrm{A}}X_{\mathrm{B}}\rangle,\quad \langle Y_{\mathrm{A}}Y_{\mathrm{B}}\rangle,\quad \langle X_{\mathrm{A}}Y_{\mathrm{B}}\rangle \tag{1}$$

の4つの相関だけを考えることになる．先の規則により一つのペアについては $X_{\mathrm{A}}X_{\mathrm{B}}$ と $X_{\mathrm{A}}Y_{\mathrm{B}}$ と $Y_{\mathrm{A}}X_{\mathrm{B}}$ と $Y_{\mathrm{A}}Y_{\mathrm{B}}$ のうち一つしか測ることができないが，同じ光源から出る十分多くの光子ペアを四群にわけてそれぞれ平均をとれば，(1)式の4つの相関を実験的に求めることができる．ここで局所実在論を仮定した場合に，その光源について何が言えるかを考えてみよう．

〈ケース1〉

(1)式の4つの相関がすべて1となったとする．$\langle X_{\mathrm{A}}X_{\mathrm{B}}\rangle = 1$ より，あるペアについてAliceが $X_{\mathrm{A}} = 1$ を得た場合，Bobが得る X_{B} は（測らずとも）1でなければならない．すると $\langle Y_{\mathrm{A}}X_{\mathrm{B}}\rangle = 1$ より Y_{A} も1でなければならない[*3]．同様に $\langle Y_{\mathrm{A}}Y_{\mathrm{B}}\rangle = 1$ より Y_{B} も1でなければならない．最後に $\langle X_{\mathrm{A}}Y_{\mathrm{B}}\rangle = 1$ より X_{A} は1でなければならないが，これは「$X_{\mathrm{A}} = 1$」だったこととと矛盾はない．したがってこの光源から出た光子ペアの偏光は教書実在論すなわち隠れた変数が支配していると思っても矛盾はない．

〈ケース2〉

$\langle X_{\mathrm{A}}X_{\mathrm{B}}\rangle = \langle Y_{\mathrm{A}}Y_{\mathrm{B}}\rangle = 1$ で，残りの2つの相関は0となったとする．やはり(1)式の左から順に相関を考えると，まず X_{A} が1なら X_{B} は1である．次に，それとは無関係に Y_{A} は1または -1 となる．さらに Y_{B} は Y_{A} に一致する必要がある．最後に Y_{B} と無関係に X_{A} は1であっておかしくないから，矛盾はない．したがってこの光源から出るペアについても，局所実在論でOKである．

さて**〈ケース3〉**として

$$\begin{aligned}&\langle X_{\mathrm{A}}X_{\mathrm{B}}\rangle = -1,\quad \langle Y_{\mathrm{A}}X_{\mathrm{B}}\rangle = 1,\\ &\langle Y_{\mathrm{A}}Y_{\mathrm{B}}\rangle = 1,\quad \langle X_{\mathrm{A}}Y_{\mathrm{B}}\rangle = 1\end{aligned} \tag{2}$$

となった場合を考えてみる．仮に X_{A} が1なら X_{B} は -1 である．そのとき Y_{A} も -1 でなければならない．そして Y_{B} は -1 でなければならない．そして最後に X_{A} は -1 となる．これは矛盾であり，あり得ない[*4]．このようなデータが本当に得られた場合は，我々はこの光源から出たペアについては局所実在論を捨てなければならない[*5]．

以上の例のように相関が ±1 という限界値をとる限り話は簡単だが，では**〈ケース4〉**として

*3） X_{A} を測ってしまっているのだから，規則上 Y_{A} について言及してはいけないのではないか，と思うかも知れない．しかしいま局所実在論を仮定しているので，規則上 Y_{A} は測らないというだけでその値は実在すると考える．

*4） もちろん局所実在論を仮定しなければあり得る．例えば観測者AliceとBobは何を測定するかを決めた途端に(2)式のうち一つを知ることになるが，その値は前々から決まっていたのでなく，観測者AliceとBobが何を測定するか決めてから実行するまでの無限小の時間にそれよりも速く光子AとBが通信して示し合わせて，値を調整する，など．

*5） 後述するがこのようなペアは量子力学でも説明できない．実際のところそういうペアはない．

$$\langle X_A X_B \rangle = -0.5, \quad \langle Y_A X_B \rangle = 0.3,$$
$$\langle Y_A Y_B \rangle = 0.7, \quad \langle X_A Y_B \rangle = 0.8 \tag{3}$$

のようなデータが得られたとき，これは局所実在論で説明できるデータなのかあるいは矛盾するのか，すぐにはわからない．このような場合に一発で判定できる「判別式」が欲しくならないだろうか？

4. ベルの不等式

そのような判別式として，仮に

$$D \equiv \langle X_A X_B \rangle + \langle Y_A X_B \rangle + \langle Y_A Y_B \rangle + \langle X_A Y_B \rangle \tag{4}$$

のようなものを考えると，ケース1では $D=4$，ケース2は $D=2$，ケース3も $D=2$ となって，ことさらケース3を異質と判定できそうにない．では4つのうち2つの項を引き算にして，例えば

$$D \equiv -\langle X_A X_B \rangle - \langle Y_A X_B \rangle + \langle Y_A Y_B \rangle + \langle X_A Y_B \rangle \tag{5}$$

としてみよう．これでもケース1では $D=2$，ケース2は $D=0$，ケース3は $D=2$ となって，やはりケース3を区別できていない．

そもそもケース3の考察から奇数回符号反転を被ると矛盾を生ずる様子がうかがえるので，対称性は悪いが一つの項だけマイナスを付けて

$$D \equiv -\langle X_A X_B \rangle + \langle Y_A X_B \rangle + \langle Y_A Y_B \rangle + \langle X_A Y_B \rangle \tag{6}$$

としてみたらどうか．するとケース1では2，ケース2は0，ケース3は4となって，ケース3だけ特に大きな値となって，なかなか良さそうである．

ベルがこのように考えたかどうかはわからない．しかしこれは次のように—教科書でよく見るように—一般化できる．いま図1の一般化として図2のように，ある光源から出た光子ペア片方を地点Aで偏光が「ϕ か ϕ+90° か」もしくは「ϕ' か $\phi'+90°$ か」のどちらかを選んで行い，もう片方を地点Bで偏光が「θ か $\theta+90°$ か」もしくは「θ' か $\theta'+90°$ か」のどちらかを選んで行うとする．変数としては前と同じく ±1 をとる X_A, Y_A, X_B, Y_B を用いる．実在論に従ってこれらが $+1$ なのか -1 なのかは前々から決まっていて，それは隠れた変数 λ（と，当然ながら角度の選択）に依存するとしよう．すなわち

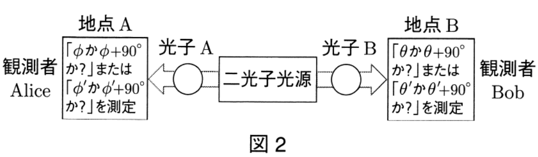


図2

$$X_A = X_A(\phi, \lambda), \quad Y_A = Y_A(\phi', \lambda),$$
$$X_B = X_B(\theta, \lambda), \quad Y_B = Y_B(\theta', \lambda) \tag{7}$$

とする．また隠れた変数が値 λ をとる確率を $p(\lambda)$ とする．いま初等代数として $-1 \le X_A, Y_A, X_B, Y_B \le 1$ となる変数について，

$$-2 \le (Y_A - X_A)X_B + (Y_A + X_A)Y_B \le 2 \tag{8}$$

であることが容易に導かれる．この真ん中の辺を展開し，左辺，中辺，右辺それぞれに $p(\lambda)$ をかけて λ で積分することにより，

$$-2 \le -\langle X_A X_B \rangle + \langle Y_A X_B \rangle + \langle Y_A Y_B \rangle + \langle X_A Y_B \rangle \le 2 \tag{9}$$

となる．これが偏光あるいはスピンに基づくCHSHバージョンのベル不等式である．この判別式を使ってケース4のデータが局所実在論の放棄を要求するものであるかの判定は各自に任せよう．

5. 量子力学はベル不等式を破る

当然のようにそして周知のように量子力学はこの不等式を破るが，どこまで破るかというと，少なくとも

$$-2\sqrt{2} \le -\langle X_A X_B \rangle + \langle Y_A X_B \rangle + \langle Y_A Y_B \rangle + \langle X_A Y_B \rangle \le 2\sqrt{2} \tag{10}$$

まで行くことは次のように分かる．図2の二光子光源としてパラメトリック下方変換による光子ペアを仮定すると，その状態はベル状態，すなわち

$$|\psi^-\rangle \equiv |\mathrm{H}\rangle_A |\mathrm{V}\rangle_B - |\mathrm{V}\rangle_A |\mathrm{H}\rangle_B \tag{11}$$

となる．この節は量子力学ではどうなるかを論じているので，大手を振って量子力学を使う．ただし(11)式は見やすさのために規格化していないことに注意．この状態の下で(6)式を量子力学を使って計算すると $3\cos 2\Theta - \sin 6\Theta$ となる．ただし $\phi' - \phi = \theta - \phi' = \theta' - \theta \equiv \Theta$ とした．これは $\Theta = \pi/8$ のとき最大値

$2\sqrt{2}$ をとる．すなわち (6) 式を実験的に求めたとき 2 を越えれば「隠れた変数では説明のつかない現象」を見たことになり，それが 2.8284 に近づくほど完全な量子もつれ（エンタングルメント）を観測したことになる．ちなみに，図 2 の具体例をより一般化した系においても，$\pm 2\sqrt{2}$ という値は量子力学による最大値となる．

6. ブラックボックス

我々は自然に対して実験という問いかけをし，自然はそれに答える．それに基づき自然の奥で起きていることの仕組みを知る．実際，量子力学もそうやって発見された．そのような，我々の入力に応答して出力を出してくるものを**ブラックボックス**と呼ぼう．こう呼んでおくと，自然だけでなく人工的なゲームマシンまで幅広く含められる．

我々人類の代表である実験家は一カ所にいるとは限らない．地点 A と B に Alice と Bob がいるとする．地点 A から B までつながっている大きなブラックボックスは地点 A では Alice に対応し，地点 B では Bob に対応するとする (図 3)．Alice と Bob は観測結果を持ち寄り，自然の仕組みを探る．

このときブラックボックスの中で「局所実在論」的なことしか起こっていないとすると，いずれ Alice と Bob はベル不等式が常に満たされているのを見てそれに気づき，自然は局所隠れた変数を使って動いていると結論する．そしてこのとき Alice と Bob は，ブラックボックスの受け答えを利用して量子暗号や量子計算を実行することはできない．

現実の世界ではどうだろうか．ベル不等式は破れている．その場合正しい理論の候補は複数あるかもしれないが，その一つである量子力学が（最良のものかはともかく）間違っているとは思えないので，「自然はエンタングルメントを使って我々に対応している」と Alice と Bob は確信する．Alice と Bob にしてみれば局所実在論で収めたいところ，論理矛盾が避けられないのでそれを捨てる．一方で自然法則を利用して量子暗号や量子計算が可能なことに気づき，そのことに驚嘆しながらも喜んで恩恵を受けるであろう．

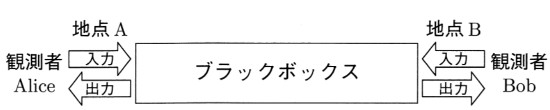


図 3

エンタングルメントは局所なのだろうか非局所なのだろうか？ エンタングルメントは非局所隠れた変数でシミュレートできるので，仮にそれがブラックボックスの中で実際に起きているとすると，非局所的なことが起こっていることになる．一方それを利用して Alice と Bob が**超光速通信**ができるかというと，よく知られているように，できない．Alice が Bob の状態を変えたということを Alice でなく Bob 自身が知覚しなければ通信にならないが，そのためには Alice が測定基底情報を Bob に古典通信で教えなければならず，そこで光速を超えられないからである．

一方，本当に瞬時通信があるならばケース 3 のような状況があり得ると脚注 4 に書いた．そうすると (6) 式のベル不等式は $2\sqrt{2}$ どころか 4 まで行ってしまう．でも現実は $2\sqrt{2}$ でとどまっている．それには理由があるのだろうか？

我々には局所的手段しか利用できないような制限の下に自然がブラックボックスの中で使える最大の非局所性が量子力学なのだろうか？ $2\sqrt{2}$ を超えるような世界では我々も非局所的手段を手にしてしまうのだろうか？

7. Popescu–Rohrlich の箱

$2\sqrt{2}$ を越え 4 まで行く例としてポペスクとロールリッヒが考えたものがある．入出力は古典ビットである．これは Alice と Bob の入力をそれぞれ x, y，出力を a, b としたとき，$a \oplus b = xy$ となる出力が 2 組ずつあるが，そのどちらかを確率 0.5 で出力として返す，というものである[*6]．例えば Alice が $x = 0$, Bob が $y = 0$ を入力したとき，この式を満たすのは $a = b = 0$ または $a = b = 1$ だから，そのどちらかを確率 0.5 で返す．他の三種の入力についても同様である．

このブラックボックス応答を瞬時に行おうとすれば，中で光速を超えた通信が必要なのは言うまでもない．そしてベル不等式を 4 まで破ってしまうのである．ではその応答を利用して Alice と Bob は超光速通信ができるかというと，実はできない．それは Alice の入力が Bob の出力に影響するか否か，またその逆が起こる

*6) ブラックボックス自体がサイコロを振ることも排除しない．問題意識が「神にサイコロを振らせたくない」から「ベル不等式が 4 まで行く世界とは何か」に変わっている．

か否かを相互情報量の形で求めると，ゼロとなるからである．

これは何を意味するか？「ベル不等式を $2\sqrt{2}$ よりさらに破るような世界では，Alice と Bob は超光速通信ができてしまうか？」に対して否定的例になっている．話はそう単純ではないのである．

8. おわりに

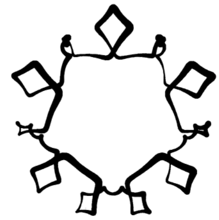
前節はベル不等式の左辺の値が 4 まで行ってしまう世界の例であった．そのような研究はいくつかあり，そこでは量子計算や量子暗号の旨味がなくなるという研究もある．ということは，局所実在論よりも「何でもあり」の世界では，逆に情報処理でできることが限られてくるのだろうか？ そうだとすると，ベル不等式が 2 の古典的世界よりも，4 まで破ってしまうぶっ飛んだ世界よりも，最も情報処理が豊かになる絶妙な世界が我々に提供されているのだろうか？ 量子論が正しいに決まっているからそれ以外を考えるのは意味がないという立場もあろうが，量子論より広げて研究することで量子論の本質に迫れるということはないのだろうか．はたしてそれは今後の進展に待つ[5]．

参考文献

1) 本稿第 2, 4, 5 節の文献は多岐に渡るが，1983 年までの文献は "Quantum theory and measurement", edited by J.A. Wheeler and W.H. Zurek, Princeton University Press (1983) に網羅されている．
2) J. フォン・ノイマン："The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics" (1932), 井上健ほか訳：『量子力学の数学的基礎』，みすず書房 (1957).
3) 詳細はフランコ・セレリ："Die Debatte um die Quantenthorie" (1983), 櫻山義夫訳：『量子力学論争』，共立出版 (1986) 参照.
4) 本人へのインタビューについては井元信之：「量子力学の解釈問題」数理科学第 40 巻第 7 号，pp.50–57 (2002) または別冊・数理科学 2006 年 4 月号「量子の新世紀」pp.46–55 (2006) 参照.
5) 立本貴大：2010 年度修士論文「物理的要請に基づく量子論の再定式化に向けた二者間ゲームの解析」．なお，この第 I 部は本稿第 6, 7 節に関するレビューとしても詳しい．

（いもと・のぶゆき，大阪大学大学院基礎工学研究科）

隠れた秩序
スピングラスに潜む秩序



川村　光

■　1. はじめに　■

この世界には，様々なタイプの秩序が現れることがある．秩序の存在は，世界の様々な事象に影響を及ぼし，またそれらを規定するので，しばしば大変に重要なものだ．ところで，世界には，一目でそれとわかる顕在化した秩序もあれば，なかなか一目では分からない「隠された」秩序もある．このような「**隠れた秩序**」が，本稿のテーマである．

物質の世界でも，秩序の概念は極めて重要である．物質が示す様々な**相転移現象**も，分子レベルの秩序と密接に関連した現象である[1)]．例えば，水（H_2O）は，高温では気体の水蒸気であるが，100 度で液化の相転移を起こして液体の水になり，さらに温度を下げると，0 度で固化の相転移を起こして固体の氷になる．これを分子レベルで見ると，気体は希薄な H_2O 分子がデタラメに飛び回っている無秩序な状態，液体の水は密度が高く H_2O 分子が近距離では互いに整列しかかっているもののまだ周期的に並んではいない状態，固体の氷は H_2O 分子が遠方まで周期的に整列した極めて秩序だった状態，ということができる．人類が分子レベルの眼を持っていなかった時代には，気体から液体，液体から固体への相転移に伴う秩序化も，いわば「隠された秩序」であった．しかし，既に分子レベルの眼を備えた現代の我々にとっては，これらの相転移に伴う秩序は，別に隠されたものではない．

相転移の別の例として，種々の磁性体の示す磁気転移がある．判り易い例は，鉄等の強磁性体が示す**強磁性**転移であろう．鉄はキュリー温度と呼ばれる磁気転移温度より高温では磁石にくっつかないが（**常磁性**状態と呼ばれる），キュリー温度以下では，強磁性の特徴である“磁化”を持ち，磁石にくっつくようになる．磁性体は，ミクロに見ると，分子レベルの小さな磁石である“**スピン**”が多数集まってできている（図 1）．鉄の場合，量子力学的効果のため，分子レベルで隣り合うスピンの向きを平行に揃えようとする相互作用が働く．高温の常磁性状態では，熱揺らぎのため，個々のスピンの向きは互いにバラバラとなり，系全体としてのトータルの磁化はキャンセルして 0 となる．これに対し，低温の強磁性状態では，エネルギーを下げるべくスピンの向きが全体としてある方向に揃い，系トータルの磁化が出現する（図 1(a)）．高温の常磁性状態（図 1(c), (d)）では，スピンの向きが場所的にランダムであるばかりでなく，時々刻々，その向きは揺らいでいる．(c) から (d) へと，(d) からまた別の状態へと，… といった具合に．これに対し，低温の強磁性状態では，スピンの向きは空間的に揃うとともに，時間的にも凍結している．いずれにせよ，強磁性秩序はスピンが全体としてある方向に揃う秩序であり，秩序は十分に明示的である．

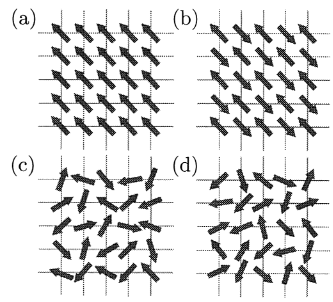


図 1　磁性体における様々なスピン状態．(a) 強磁性状態，(b) 反強磁性状態，(c) ある一瞬の常磁性状態，(d) 別の一瞬の常磁性状態．

秩序の程度を表す量のことを**秩序変数**というが，強磁性体の秩序変数は，系の磁化 $\boldsymbol{m}$ であり，各スピン・ベク

トル $\boldsymbol{S}_i = (S_{ix}, S_{iy}, S_{iz})$ に対し，$\boldsymbol{m} = (1/N)\sum_i \boldsymbol{S}_i$ と定義される（i が各スピンの番号，N はスピンの総数）．

反強磁性体と呼ばれる磁性体もある．反強磁性体では，分子レベルで隣り合うスピンの向きを逆向き（反平行）に揃えようとする相互作用が働いている．このため，反強磁性体で温度を下げると，高温の常磁性状態から，スピンが互い違いに揃った反強磁性状態（図 1 (b)）へと秩序化する．もちろん，この場合も秩序は十分明示的であり，隠されたものは格段何もない．

2. スピングラス

本稿での主役は**スピングラス**と呼ばれる磁性体である[2,3]．スピングラスとは，隣り合うスピンを平行に揃えようとする強磁性的な相互作用と反平行に揃えようとする反強磁性的な相互作用が混在，拮抗した**ランダム**な磁性体のことを指す．銅，銀，金などの非磁性金属にスピンを持つ鉄やマンガンなどが数パーセント混ざった**カノニカルスピングラス**と呼ばれる磁性合金系で，1970 年頃最初に発見された[4]．合金中でのスピン間の相互作用は，その距離により強磁性的にも反強磁性的にもなることが知られている．この相互作用の性質により，スピンがランダムな位置に配置した合金中では，各スピンがお互いに矛盾なく平行・反平行の向きを取ることができなくなる（図 2）．このような状況を指して“**フラストレーション**”が存在していると言う[5,6]．スピングラス磁性体では，フラストレーションとランダムネスの効果のため，低温でスピンはランダムな方向に凍結した磁気的な“ガラス状態”になる．強磁性とも反強磁性とも異なる新しいガラス的な磁気秩序状態が実現しているのでは，ということで，発見当時から大きな注目を集めた．

一般に，磁気相転移では，“帯磁率”と呼ばれる磁化を磁場で割った量（$= M/H$）が相転移温度で強い異常を示すことが知られている．磁性合金系でも，図 3

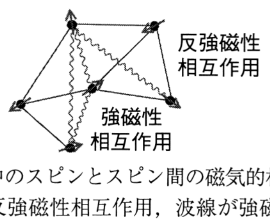


図 2　合金中のスピンとスピン間の磁気的相互作用．実線が反強磁性相互作用，波線が強磁性相互作用を表す．

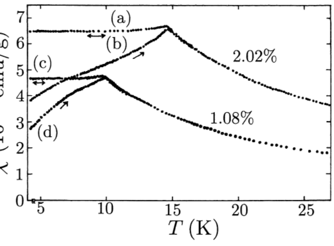


図 3　スピングラス合金，銅マンガン CuMn の帯磁率の温度依存性（S. Nagata, P.H. Keesom and H.R. Harrison: *Phys. Rev.* **B16**, 1633 (1979) より引用）．

に示すような相転移に伴うと考えられる明瞭な異常が観測され，スピングラス転移は 2 次転移であり，スピングラス状態は新たな熱平衡秩序相だということが明らかになった．その後の活発な研究にも関わらず，スピングラス転移とスピングラス秩序状態の本質については，未だ謎が残っており，現在も研究が続いている．

スピングラス状態においては，スピンの向きには，いかなる空間的周期性も存在しない．スピンの向きは，常磁性状態と同じく，空間的にはバラバラである．常磁性状態との差は，この空間的にランダムなスピンの向きが，時間的に揺らがずに凍結している点にある．即ち，図 1 (c) あるいは (d) に示したような空間的にランダムなスピン配置が，**時間的に凍結**したような状態になっている．このような時間方向の秩序を定式化するために，エドワーズとアンダーソンは以下のような秩序変数 q を導入した（ここで，t は時間を，$\langle\cdots\rangle$ は熱平均を表す）[7]．

$$q = \lim_{t\to\infty}(1/N)\sum_i \langle \boldsymbol{S}_i(0)\cdot\boldsymbol{S}_i(t)\rangle.$$

この量は，スピンの向きが空間の各場所毎にランダムであっても，時間的に凍結していれば，0 でない有限値を与え，エドワーズ–アンダーソンの秩序変数と呼ばれる．（より正確には，スピングラス秩序状態では，状態空間が複雑な構造を持つ可能性がある．そのような場合には，秩序変数としては，単一の量 q のみでは不十分で，関数 $q(x)$ を考える必要がある．この辺りは，“**レプリカ対称性の破れ**”の問題として，スピングラス分野において活発に研究されてきたが，ここでは紙数の関係もあり，これ以上立ち入らない．）

いずれにせよ，スピングラス転移は，各スピンが空間的には周期性を持たないランダムなパターンに，しかし時間的には凍結する秩序化である．通常の強磁性や反強磁性とは異なったタイプの秩序，相転移であるとは

いえ，そこには格段隠されたものは何もないように見える…．しかし，果たして本当にそうなのであろうか？

■　3. 相転移と対称性，その自発的破れ　■

後ほど重要となるので，ここで，**相転移**と「**自発的対称性の破れ**」について，一言説明しておく[1]．先に述べたように，ミクロレベルでの秩序化現象として捉えられるが，他方では，相転移は自発的対称性の破れという概念に基づいて理解できる．系の対称性とは，系のハミルトニアン（エネルギー）を不変に保つ一連の対称操作のことを指す．自発的対称性の破れで特に重要となるのは，系の構成要素すべてに（磁性体の場合では系のスピンすべてに）同一の変換を施す，いわゆる大域的（グローバル）な対称性である．

磁性体を記述する際よく使われるハミルトニアンとして，ハイゼンベルグ・ハミルトニアン

$$H = -J \sum_{i,j} \boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j$$

がある．J が隣り合うスピン間の相互作用で，$J > 0$ なら強磁性，$J < 0$ なら反強磁性を表現している．隣り合うスピンの内積で書けていることから判るように，ハイゼンベルグ・ハミルトニアンは，各スピンベクトルを，3 成分のスピン空間内で回転したり鏡に映したりする操作 R に関し不変である．即ち，R を任意の $O(3)$ 行列として，変換 $\boldsymbol{S}_i \rightarrow \mathrm{R}\boldsymbol{S}_i$ (for all i) に関し不変である．$O(3)$ は，その行列式が $+1$ で与えられる通常の回転 $SO(3)$ と，行列式の符号を変える離散変換，即ち，スピン空間でスピンの矢印を逆向きに反転させたり，ある面で鏡映したりする操作 Z_2 の直積 $O(3) = Z_2 \times SO(3)$ として書くこともできる（念のため，やや専門的なお断りをしておくと，ここでの "鏡映" はスピンの "軸性ベクトル性" を考えずに，古典的な矢印としてスピン空間で鏡に移す操作として定義している）．

強磁性や反強磁性秩序状態では，これら $O(3) = Z_2 \times SO(3)$ 対称性が，相転移の結果「自発的に」破れる．即ち，ある方向に磁化が揃った秩序状態が一旦形成されれば，これをスピン空間で全体として回転したり鏡映したりした状態はもはや実現されない．これに対し，高温側での常磁性状態では，ハミルトニアンの対称性は破れていない．系を記述するハミルトニアン（あるいは系を記述する基本法則）自体は高い対称性を保持しているにも関わらず，実際に実現している状態にはこの高い対称性が反映されず，より低い対称性しか表に見えなくなっている．この自発的対称性の破れの概念は，物性物理学分野における相転移現象の基本概念であるにとどまらず，南部陽一郎博士の先駆的業績等により，現在では高エネルギー物理学の基本概念にもなっている．

いずれにせよ，ハイゼンベルグモデルで記述される磁性体の磁気秩序状態では，それが強磁性であろうと，反強磁性であろうと，あるいはスピングラスであろうと，スピン・ハミルトニアンの持つ対称性 $O(3) = Z_2 \times SO(3)$ が自発的に破れており，その結果，スピンが有限の期待値 $\langle S_i \rangle > 0$ を持つことになる．

ちなみに，先に紹介したカノニカルスピングラスは，概ねハイゼンベルグモデルで良く記述されることが分かっている．即ち，主要なスピン間の磁気的相互作用は，ハイゼンベルグスピンの $O(3) = Z_2 \times SO(3)$ 対称性を持つ（多少専門的に言うと，この主要な相互作用は伝導電子によって媒介されるもので，RKKY 相互作用と呼ばれる）．ただし，現実の磁性体では，3 成分スピン空間で等方的なハイゼンベルグ相互作用に加え，弱い**磁気異方性**が程度の差こそあれ存在する（カノニカルスピングラスの場合，スピン–軌道相互作用に起因するジャロシンスキ–守谷相互作用が磁気異方性の主な原因になっている）．磁気異方性の程度は，物質の種類や磁性原子濃度によってかなり異なるが，等方的な相互作用に比べて通常約 1〜2 桁程度小さい．スピングラスでは，当然，磁気異方性もランダムになっている．一般に，磁気異方性はハミルトニアンの対称性を低下させるので，スピングラス秩序において磁気異方性がどのような役割を果たすのかは，重要な論点となる．

■　4. スピングラス秩序とカイラリティ　■

では，スピングラス秩序状態に，何か隠されたものがあるのだろうか？ 筆者は，1992 年に，前述のカノニカルスピングラスを念頭に，これらハイゼンベルグ型のスピングラス磁性体においては，それまで注目されていなかった隠れた秩序が主役を演じているのではないかという仮説——**カイラリティ仮説**——を提出した[8~10]．ここでの隠れた主役は**カイラリティ**と呼ばれる量で，「**スピングラス相への相転移の "隠れた主役" は，結果的に凍結するスピン自体ではなく，実はカイラリティである**」という考え方である．

では，カイラリティとは何か？ カイラリティとは，

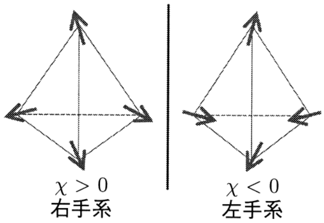


図4 立体的な（非平面的な）スピン構造に関して，右手系（カイラリティ [+]）と左手系（カイラリティ [−]）の2つの状態．2つの状態は同一のエネルギーを持っている．スピン空間の中の鏡映面に関して各スピンを矢印とみなしてスピン空間で鏡映すると，2つのスピン配位は互いに入れ替わる．

物理学では，**右・左の区別**を表す量として定義される（図4）．ギリシア語の「手」という言葉を語源とする言葉で，「右手」と「左手」の区別を表す．例えば，右ならプラス，左ならマイナスとなるような物理量である．ハイゼンベルグ型のスピングラスでは，相互作用のフラストレーション効果のため，スピンは場所毎にランダムに，様々な向きを向いている．このような立体的なスピン構造については，局所的に右・左の区別をすることができる．

スピン系のカイラリティを，もう少し定量的に定義しておこう．スピン配位が局所的に「右手系」か「左手系」かを言うためには，少なくとも3個のスピンが必要である．そこで，3個の近接したハイゼンベルグスピン $\boldsymbol{S}_i$, $\boldsymbol{S}_j$, $\boldsymbol{S}_k$ に対し，局所的なカイラリティ変数 χ を

$$\chi = \boldsymbol{S}_i \cdot (\boldsymbol{S}_j \times \boldsymbol{S}_k)$$

と定義する．χ は，スピンが立体的（非平面的）な構造を取るとき0でない値を取り，3個のスピンがスピン空間で大きな体積を張るほどその値（絶対値）は大きい．χ の符号が，3個のスピンが「右手系的」か「左手系的」かを表す．χ はスピンの鏡映操作や反転操作 $\boldsymbol{S} \to -\boldsymbol{S}$ に関して符号を変えるのに対し，連続的な回転操作（$SO(3)$ 回転）に関しては不変に保たれる．カイラリティが Z_2 鏡映操作で符号を変えることが，右手（左手）を鏡に映すと左手（右手）になることに，ちょうど対応している．

カイラリティ仮説——第1ステップ

さて，カイラリティ仮説であるが，このシナリオは2つの部分から成り立っている．第1の部分は，異方性がない等方極限でのハイゼンベルグスピングラスの振舞いに関する部分である．カイラリティ仮説では「完全に等方的なハイゼンベルグスピングラスでは，カイラリティが空間的にランダムに凍結する相転移—**カイラルグラス転移**—が，スピンがランダムに凍結する通常のスピングラス転移と異なった温度で，より高い温度で起きる」とする．スピンとカイラリティが別々の温度で秩序化すると考えるわけで，この現象を指して，**「スピン–カイラリティ分離」**と呼ぶ．カイラリティのグラス転移温度（カイラルグラス転移温度）T_{CG} とスピンのグラス転移温度 T_{SG} に対し，$T_{CG} > T_{SG}$ となっているという主張である．T_{CG} と T_{SG} の間の温度では，スピンは常磁性状態で揺らいだままカイラリティのみが空間的にランダムに凍結した状態が実現していることになり，**カイラルグラス相**と呼ばれる．

カイラリティは，3個のスピンの3重積として書け局所的にはスピンと独立な量ではないので，そもそも，カイラリティがスピンと分離しスピンと異なる温度で秩序化するなどという奇妙なことが起こり得るのか，という疑問を持たれるかもしれない．カイラルグラス状態の直感的なイメージとして，右手・左手との以下のようなアナロジーが有用かもしれない．

右手と左手だが，今，それぞれの指がスピンの向きを表すと思うことにしよう．さて，もし，時間的にスピン（指）の向きが動かず止まっていれば（スピンが凍結していれば），時間平均して見ても（あるいは，長時間シャッターを開けっ放しにして写真を撮っても），指はハッキリ写る．さて次に，一方の手（例えば右手）が物凄いスピードで回転（$SO(3)$ 回転）しているとしよう．高速で動き回る指は，時間平均して見ると，ボケて写真からは消えてしまうだろう．この場合，時間平均したスピンの向きは定まっておらず，スピンは秩序化（オーダー）していないことになる．しかし，いくら高速で動き回っていようと，右手は右手で決して左手になったわけではない！ このような状態は，指（スピン）の空間内での向きは定まっていないが，右・左の別はチャンと定まっている，即ちカイラリティはオーダーしている状態だ．もしスピン自体がオーダーすれば，そのオーダーの仕方に応じて，右・左も（即ちカイラリティも）決まってくるというのは見易い話だが，今の場合興味深いのは，スピン自体はオーダーしていなくともカイラリティはオーダーし得る，という点だ．カイラリティは元々，スピンの局所的な積で定義された量だったにも関わらず，あたかもスピンとは独立な量であるが如く，スピンがオーダーしていな

い状況でオーダーする，というわけだ．これが“**スピン–カイラリティ分離**”の直感的イメージである．

それでは，カイラルグラス状態とカイラルグラス転移を，3 節で説明した自発的対称性の破れの観点からみると，どうなるだろうか？ 等方的ハイゼンベルグ系では，ハミルトニアンの対称性は，$O(3) = Z_2 \times SO(3)$ であった．T_{SG} 以下で実現するスピングラス状態では，$Z_2, SO(3)$ 双方の対称性が共に破れている．これに対し，カイラリティは凍結しているがスピンが凍結していないカイラルグラス状態では，離散的な Z_2 “鏡映”対称性のみが破れており，連続的な $SO(3)$ 回転対称性は破れていない．これを理解するには，カイラリティが Z_2 “鏡映” に対し符号を変えるが，$SO(3)$ 変換では不変に保たれることを思い出せばよい．カイラルグラス転移とカイラルグラス相は，このような**部分的な自発的対称性の破れ**が起きているとして，理解できる．

実際に，等方的ハイゼンベルグスピングラスで，このような部分的な対称性の破れ，即ちスピンカイラリティ分離，が起きているかどうかは，全く非自明な問題である．目下のところ，この問題については，厳密なことは何も分かっておらず，数値シミュレーションによる解析が唯一の研究手段となっている．研究者間での完全なコンセンサスは未だ得られていないものの，最近の大規模シミュレーションによると，カイラルグラス転移とスピングラス転移は，温度で 15%程度離れているという結果が得られている[11]．この，ある意味驚くべき結果は，我々のスピングラス転移の理解に重大な帰結をもたらす．

カイラリティ仮説――第 2 ステップ

カイラリティ仮説の第 2 の部分は，磁気異方性の効果に関する部分である．カイラリティ仮説では，現実のスピングラス磁性体には必ず存在する弱いランダムな磁気異方性が，一旦分離されたスピンをカイラリティに再結合させると考える（**スピン–カイラリティ再結合**）．先に述べたように，異方性は一般的にハミルトニアンの対称性を低下させる．ランダム異方性がある場合には，等方的な場合の対称性 $O(3) = Z_2 \times SO(3)$ のうち，連続 $SO(3)$ 対称性が壊され，残るのは離散的な Z_2 対称性のみとなる．残る Z_2 対称性は，スピンの向きを反転させる変換 $\boldsymbol{S}_i \to -\boldsymbol{S}_i$ に対する対称性で，これはスピンの 3 次量として定義されたカイラリティの符号を反転させる変換になっており，カイラルグラス転移で自発的に破れる対称性に他ならない．ハミルトニアンから $SO(3)$ 対称性が失われた結果，異方的な系で一旦カイラリティの秩序化，即ち Z_2 対称性の自発的破れが起きると，スピンはもはや常磁性状態のまま揺らぐことができず，カイラリティのオーダーにひきずられてオーダーする．この場合のスピン秩序は，カイラリティ秩序化に伴い異方性を通して誘起されたものなので，本質的にカイラリティ秩序と同じ性格を持つ．弱い異方性はカイラリティ秩序自体にはほとんど影響しないと考えられるので，弱いランダム異方性を持った現実のスピングラスは，等方系のカイラルグラスと同じ性質を持つことになる．

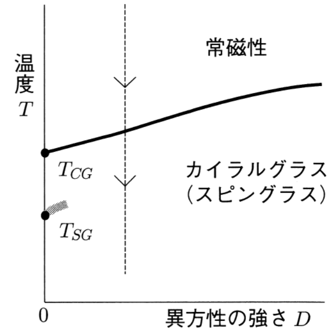


図 5 ハイゼンベルグスピングラスモデルの，温度（T）とランダム異方性の強さ（D）面での，相図と相転移線の振舞い．等方系が $D = 0$ に対応．典型的な実験系で温度を下げる過程は，図中破線に対応する．影で示した線は，真の相転移線ではないクロスオーバー線を表す．

ランダムな磁気異方性の強さを D として，図 5 に，D と温度 T の面での相転移線の振舞いを示した．等方的な場合（$D = 0$）には，Z_2 対称性が自発的に破れるカイラルグラス転移と，$SO(3)$ 対称性が自発的に破れるスピングラス転移が別々の温度で起きる（$T_{CG} > T_{SG}$）．異方的な場合（$D > 0$）には，ハミルトニアンの $SO(3)$ 対称性はランダム異方性のため壊されるが，Z_2 対称性のほうは等方系の場合と同様に保持されている．このため，$D > 0$ でも，Z_2 対称性の自発的破れに伴うカイラルグラス転移線は $D = 0$ の場合のカイラルグラス転移温度から伸びた形で相転移線として存続するが，$SO(3)$ 対称性のほうはハミルトニアン・レベルで失われたため $D > 0$ では相転移線としては存続できない（ただし，磁気異方性が十分弱い場合には，真の転移ではないがクロスオーバー的な急激な変化が観測される可能性はある）．なお，カイラルグラス転移で自発的に破れる対称性は異方性の有無に関わらず一貫してカイラリティに関した Z_2 であり，等方極限 $D \to 0$ が非解析的になっているわけではない．

結局，$D>0$ の現実のスピングラス磁性体で温度を下げていくと（図5破線），ある温度でカイラルグラス転移が起きるが，このカイラルグラス転移点でスピン自体も付随的に秩序化する．この付随的な秩序化現象が，カノニカルスピングラス等で実験的に“スピングラス転移”として観測される．しかし，この“スピングラス転移”の真の秩序変数はスピンではなく，あくまでカイラリティである．このことは，$D>0$ のカイラルグラス（＝スピングラス）転移線が，$D=0$ のカイラルグラス転移の延長であり，$D=0$ のスピングラス転移とは全く無関係であることからも，明らかであろう．$D=0$ で，スピンとカイラリティが分離していたからこそ，このような奇妙な状況が生じたわけである．

このようにして，“スピングラス”転移の真の主役であるカイラリティは，自然により，巧妙に隠されてしまったわけである．読者の皆さんには，「現実のスピングラス転移では，実験的にはスピン自体が凍結秩序化しているのだから，何でカイラリティなどという量をわざわざ持ち出す必要があるのか」と思われるかもしれない（実際，私自身，カイラリティ仮説を提唱した際には，多くのプロの研究者からそのような批判をいただいた）．しかしながら，$D=0$ でスピンとカイラリティが分離していれば，カイラリティがスピングラス転移に本質的な役割を果たす量として登場するのは，避けて通ることのできない必然となる．

■ 5. 実験との関連 ■

この節では，カイラリティ仮説が，現実のカノニカルスピングラスに対する実験からどのようにサポートされるかについて，研究の現状を紹介したい．2次相転移を特徴づける普遍的な物理量として，各種の臨界指数がある．カノニカルスピングラスに対し実験的に測定された，スピン秩序に伴う各種臨界指数の値については，現在では，様々な物質，様々なグループによる報告がほぼ一致している．帯磁率（非線形帯磁率）の指数 γ が $\gamma=2.0\sim2.2$，相関長の指数 ν が $\nu=1.3\sim1.4$，転移温度におけるスピン相関の減衰を記述する指数 η が $\eta=0.4\sim0.5$ と得られている[12]．しかも，これらの臨界指数値は，カノニカルスピングラスの範囲であれば，合金の種類や異方性の強さ等にもほとんど依らない．他方，これらスピングラス磁性体で観測される臨界指数の起源については，実は，長い間不明であった．

通常の臨界現象の常識から言うと，弱い磁気異方性を有する系の転移の臨界性のクラスは，磁気異方性を無限に強くした系（スピンが z 成分 $\boldsymbol{S}_z$ のみを持つイジングモデルに対応）の臨界性のクラスと同一になると期待される．磁気異方性が弱い場合には，転移温度に近づくにつれ，等方的なハイゼンベルグモデルの“スピングラス転移”のスピンの臨界指数（カイラリティの臨界指数ではなく！）から異方的なイジングスピングラスのスピンの臨界指数へと，クロスオーバーを起こすことが期待される．しかるに，実験的にはそのようなクロスオーバーは観測されていない．しかも，観測された臨界指数の実験値は，異方性が無限に強い極限であるイジングスピングラスに対する理論値とも，また等方的なハイゼンベルグスピングラスの理論値とも，合致しない．ちなみに，近年の大規模数値シミュレーションにより，前者については $\gamma=5.8\sim6.5$，$\nu=2.5\sim2.7$，$\eta=-0.38\sim-0.40$，後者については $\gamma\sim3.5$，$\nu\sim1.5$，$\eta\sim-0.30$ と報告されており，これらは明らかにカノニカルスピングラスの実験値とは合わない（特に η は，いずれの場合についても，符号が逆になる）．

一方，カイラリティ仮説からは，カノニカルスピングラスのスピンの臨界指数は，等方系のカイラリティの（スピンではなく！）臨界指数と同一になるはずである．近年の大規模数値シミュレーションによれば，カイラルグラスの臨界指数は，$\gamma=2.0\pm0.4$，$\nu=1.4\pm0.2$，$\eta=0.6\pm0.2$ と評価されており[11]，これらはカノニカルスピングラスの臨界指数の測定値と良く一致する．しかも，$D\to0$ でも転移の臨界性のクラスは不変のため，通常の常識とは異なり，異方性による臨界指数のクロスオーバーは期待されず（これは $D=0$ でスピンとカイラリティが分離していることの帰結であることに注意されたい），この点に関しても，臨界現象に関するクロスオーバーが観測されないという実験結果と調和的である．

スピングラス転移の隠れた主役とされるカイラリティであるが，実はカイラリティ自体は，これまで，実験的に直接観測するのが極めて困難であった．カイラリティが多スピン量であるため，直接観測にかけるのが難しいのである．しかし，カイラリティそのものの振舞いを直接見るという点に関しても，最近新たな可能性が出てきた．カノニカルスピングラスが金属であることを利用すれば，“**異常ホール効果**”がカイラリティの有力なプローブとして使えることが確立しつつある．ホール効果とは，試料に流す電流 I と垂直に磁場 B を

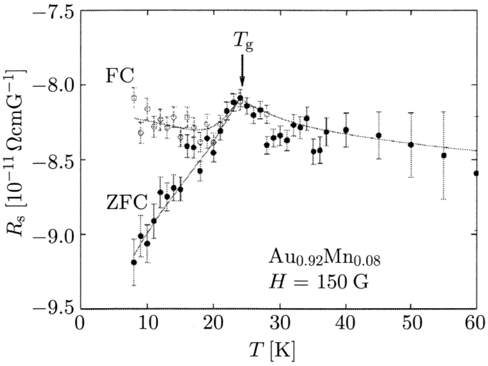


図 6　スピングラス合金 AuMn の異常ホール係数 R_s の温度依存性（文献 13)）．ZFC（FC）は零磁場（磁場中）冷却のデータを表す．T_g がスピングラス転移温度．

かけた場合，電流と磁場両方に垂直な方向に電圧 V が発生する現象である．試料が磁性体の場合，ホール抵抗率 ρ_H は，$\rho_H = R_0 H + R_s M$ のように磁場に比例する正常項と，磁化に比例する異常項の和で表すことができることが知られている．スピングラスでは，実はこの異常項の係数 R_s がカイラリティに対する "帯磁率" の役割を果たすことが分かっているので，ホール抵抗率の磁化に比例した成分 R_s を測定することにより，カイラリティに関する帯磁率――カイラル帯磁率――を直接測定することができる．

図 6 にスピングラス合金 AuMn の R_s の温度変化の測定例を示した[13)]．R_s は転移点で異常（折れ曲がり，カスプ）を示し，転移点以下ではゼロ磁場冷却（ZFC）の測定と，磁場中冷却（FC）の測定では，その値が異なっている．もし仮に，カノニカルスピングラスのスピングラス転移がカイラリティ起源でなかった場合には，カイラル帯磁率に直接対応した異常ホール係数には，カスプのような強い異常は現れないであろう．異常ホール効果に現れた強い異常と履歴現象は，正に上述のカイラリティ仮説のシナリオで予測された振舞いである．この他にも，カイラリティ仮説は，磁場中相図や秩序相におけるレプリカ対称性の破れ等についても，実験と調和的な予言を与えるが，詳しくは文献 10) を参照していただきたい．

■　6. おわりに　■

隠された秩序としてのスピングラスとカイラリティに関わる最近の理論と実験の状況を紹介させていただいた．カイラリティがカノニカルスピングラスの隠された秩序変数であることの証拠は，近年次第に固まりつつあると思う．

現に眼前に見えるものに基づいて世界を理解しようという態度は，極めて自然なものであり，またある意味，健全なものでもあろう．しかしながら，自然界においても，あるいは人間の歴史のような人文的な分野においても，重大な真実が隠されてしまっているということは，往々にしてあり得ることだ．隠された真実を明らかにする作業は，典型的にはロストコードやミッシングリンクの類の問題であり，何か我々のロマンを掻き立てる部分がある．しかし，隠された真実を正しく探り当てることは，しばしば，そう容易なことではない．自然が隠した秩序をサイエンスとして明らかにするには，注意深い実験やシミュレーションによる実証的研究を地道に積み重ねていくことが，唯一の道であろう．

参考文献

1) 川村光『パリティ物理学コース 統計物理学』丸善．
2) 高山一『パリティ物理学コース クローズアップ スピングラス』丸善．
3) 英文レヴューとして，K. Binder and A.P. Young: *Rev. Mod. Phys.* **58**, 801 (1986); K.H. Fischer and J.A. Hertz: *Spin Glasses* Cambridge University Press (1991); J.A. Mydosh: Spin Glasses Taylor & Francis (1993); N. Kawashima and H. Rieger, in *Frustrated Spin Systems*, ed. H.T. Diep World Scientific, Singapore (2004).
4) V. Cannella and J.A. Mydosh: *Phys. Rev. B* **6**, 4220 (1972).
5) シリーズ "フラストレーションがつくる新しい物性" パリティ（丸善）**25** 巻 3 号–6 号 (2010).
6) 文部科学省・科学研究補助金・特定領域研究「フラストレーションが創る新しい物性」ホームページ (http://www.frustration.jp).
7) S.F. Edwards and P.W. Anderson: *J. Phys. F* **5**, 965 (1975).
8) H. Kawamura, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 3785 (1992).
9) 川村光 "隠されたオーダーパラメーター―スピングラスとカイラリティ" 日本物理学会誌 **59**, No.1, p.9 (2004).
10) H. Kawamura, *J. Phys. Soc. Jpn.* **79**, 011007 (2010).
11) D.X. Viet and H. Kawamura, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 027202 (2009).
12) I.A. Campbell and D.C.M.C. Petit, *J. Phys. Soc. Jpn.* **79**, 011006 (2010).
13) T. Taniguchi, *J. Phys. Condens. Matter* **19**, 145213 (2007).

（かわむら・ひかる，大阪大学大学院理学研究科）

隠れた位相
ホール効果と幾何学的位相

村 上　修 一

1. はじめに

本特集は物理の諸分野での「隠れた物理法則」であり，読者も多岐の分野にわたるであろう．そのため私の特集記事では他分野の方にも分かりやすい形でこの分野の解説を試みる．詳しい議論にはあまり触れられないので，より詳しい話を知りたい読者は他の解説記事[1~5]を参照されたい．

ここでは**ホール効果**を考える．ホール効果は図 1(a) のように，試料に磁場をかけておいて，そこにさらに電場をかけると，電子はローレンツ力によって軌道が曲げられ，電場に垂直向きにも電流が流れるというものである．こうした効果が起こり電子の軌道が曲がるためには時間反転対称性を破る必要があり，外部磁場をかけた場合か，もしくは試料が強磁性体の場合に現れる．

試料が強磁性体の場合のホール効果を**異常ホール効果**[6]（図 1(b)）と呼ぶが，これは図 1(a) で，磁場を磁化で置き換えたものととらえることができる．図 1(b) を見ると，強磁性体では上向きスピンが多い状態であるから，上向きスピンは電場によって曲がった軌道を描くといえる．こうした運動は，固体中のスピン軌道相互作用によってもたらされる．これから考えると，もし非磁性体であってもそこには上向き，下向きスピンの電子があるので，例えば上向きスピンの電子は左向きにずれ，下向きスピンの電子は右向きというように運動することが予想される．この様子を図 1(c) に示す．これを**スピンホール効果**[7,8]と呼ぶ．

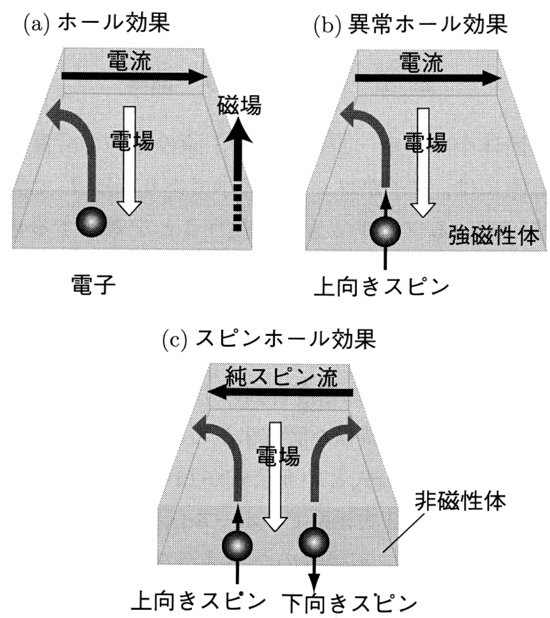


図 1　種々のホール効果．

こうしたホール効果は古典的に扱っている限りでは特別な性質があるようには思えないが，電子の波動性を考えに入れ始めるとその興味深い性質が現れる．ここには電子の「波数空間（運動量空間）のベリー曲率」が現れる．**ベリー曲率**は，ベリー位相[9,10]の理論から出てきた概念であり，$U(1)$ ゲージ理論と言ってもよい．電子状態は固体中でエネルギーバンド構造を持つが，その構造がベリー曲率（ゲージ場の構造）を持ち，ホール効果に現れるのである．こうした構造に関する研究を進めて

いくと，トポロジカル秩序と呼ばれる特異な物質のクラスがあることが分かる．一つには**量子ホール系**であり，もう一つは**量子スピンホール系（トポロジカル絶縁体）**である．このようにホール効果の背景には多様な物理現象が隠れている．またこうした物理現象は電子の波動性とバンド構造が効いているので，電子に限らず多様な系で存在する．その例として光，およびスピン波（マグノン）の2つを挙げる．これらにおいては系が違い物理現象もかなり異なっているが，物理的機構は共通している．こうした普遍的機構に着目することで新しい物理現象や新たな法則に到達できる．

2. ホール効果とベリー曲率

固体中でのホール効果を量子論の枠内で計算する際には，電子がフェルミ粒子であり温度 T で決まっているフェルミ分布に従うことを考慮する必要がある．こうした計算の枠組みは線型応答理論と呼ばれる．線型応答理論でホール効果を計算するには，平衡状態に対して，電場を断熱的に（徐々に）印加したときの密度行列のずれを計算する．そこから電流の期待値を計算することとなり，計算に関しては久保公式という公式が知られている．久保公式により2次元系でのホール伝導率は，ギャップが開いていて不純物のない清浄な極限で

$$\sigma_{xy} = \frac{-i\hbar}{V} \sum_{\boldsymbol{k},\alpha\neq\beta} \frac{f(\varepsilon_{\alpha\boldsymbol{k}}) - f(\varepsilon_{\beta\boldsymbol{k}})}{\varepsilon_{\alpha\boldsymbol{k}} - \varepsilon_{\beta\boldsymbol{k}}} \cdot \frac{\langle u_{\alpha\boldsymbol{k}}| j_x(\boldsymbol{k}) |u_{\beta\boldsymbol{k}}\rangle\langle u_{\beta\boldsymbol{k}}| j_y(\boldsymbol{k}) |u_{\alpha\boldsymbol{k}}\rangle}{\varepsilon_{\alpha\boldsymbol{k}} - \varepsilon_{\beta\boldsymbol{k}} - i\eta}. \quad (1)$$

ここで $\varepsilon_{\alpha\boldsymbol{k}}$ は α 番目のバンドの，Bloch 波数 $\boldsymbol{k}$ でのエネルギー，$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{k})$ は Bloch 表示での電流密度演算子，$f(\varepsilon)$ はフェルミ分布関数，V は2次元系の面積，η は正の無限小である．また $|u_{\alpha\boldsymbol{k}}\rangle$ は α 番目のバンドのブロッホ波 $\psi_{\alpha\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})$ の周期部である：$\psi_{\alpha\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} u_{\alpha\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})$．これを整理すると

$$\sigma_{xy} = \frac{-i\hbar}{V} \sum_{\boldsymbol{k},\alpha\neq\beta} f(\varepsilon_{\alpha\boldsymbol{k}}) \cdot \frac{\langle u_{\alpha\boldsymbol{k}}| j_x |u_{\beta\boldsymbol{k}}\rangle\langle u_{\beta\boldsymbol{k}}| j_y |u_{\alpha\boldsymbol{k}}\rangle - \text{c.c.}}{(\varepsilon_{\alpha\boldsymbol{k}} - \varepsilon_{\beta\boldsymbol{k}})^2}. \quad (2)$$

ここで電流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{k})$ は $\boldsymbol{j} = -e\frac{\partial H(\boldsymbol{k})}{\hbar\partial\boldsymbol{k}}$ と表されるので，上の式は

$$\sigma_{xy} = \frac{-ie^2}{\hbar V} \sum_{\boldsymbol{k},\alpha} f(\varepsilon_{\alpha\boldsymbol{k}}) \cdot \left(\left\langle \frac{\partial u_{\alpha\boldsymbol{k}}}{\partial k_x} \middle| \frac{\partial u_{\alpha\boldsymbol{k}}}{\partial k_y} \right\rangle - \text{c.c.} \right). \quad (3)$$

これを書きなおすと

$$\sigma_{xy} = \frac{-e^2}{h} \int \frac{d^2k}{2\pi} \sum_{\alpha} f(\varepsilon_{\alpha\boldsymbol{k}}) b_{\alpha z}(\boldsymbol{k}). \quad (4)$$

ただし

$$\boldsymbol{a}_\alpha(\boldsymbol{k}) = i \langle u_{\alpha\boldsymbol{k}}| \nabla_{\boldsymbol{k}} |u_{\alpha\boldsymbol{k}}\rangle, \quad (5)$$

$$\boldsymbol{b}_\alpha(\boldsymbol{k}) = \nabla_{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{a}_\alpha(\boldsymbol{k}) \quad (6)$$

であり，これらはそれぞれ**ベリー接続**とベリー曲率，または**ゲージ場**と**場の強さ**と呼ばれる．これらはちょうどそれぞれベクトルポテンシャルと磁束密度にそれぞれ対応する数学的構造を持っている．

実はこれらは本解説のテーマである，波動関数の位相の自由度と深く関連している．例えば仮に波動関数が実であったとすると $\boldsymbol{a}_\alpha(\boldsymbol{k})$, $\boldsymbol{b}_\alpha(\boldsymbol{k})$ はともに恒等的にゼロとなる．もう少し詳しく見るにはゲージ変換性を見るとよい．Bloch 波動関数の周期部分 $u_{\alpha\boldsymbol{k}}$ は Bloch 表示でのハミルトニアン $H(\boldsymbol{k})$ の固有ベクトルであるため，$\alpha, \boldsymbol{k}$ に依存した位相を任意に付加できる自由度がありこれをゲージ変換と呼ぶ．具体的に書くと，$\theta_{\alpha\boldsymbol{k}}$ を任意関数として，$|u_{\alpha\boldsymbol{k}}\rangle$ を

$$|u'_{\alpha\boldsymbol{k}}\rangle = e^{i\theta_{\alpha\boldsymbol{k}}} |u_{\alpha\boldsymbol{k}}\rangle \quad (7)$$

で置き換えてもよく，これは物理量には効いてこないはずである．これより

$$\boldsymbol{a}'_\alpha(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{a}_\alpha(\boldsymbol{k}) - \nabla_{\boldsymbol{k}}\theta_{\alpha\boldsymbol{k}}, \quad \boldsymbol{b}'_\alpha(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{b}_\alpha(\boldsymbol{k}) \quad (8)$$

となり，これはベクトルポテンシャルおよび磁束密度と似ている．なおこれは波数空間に存在する場であり，通常の磁場と直接は関係ない．なおこうした場がゼロでないためには，バンドが複数あることが必須である．

ベリー曲率 $\boldsymbol{b}_\alpha(\boldsymbol{k})$ については様々な面白い性質が知られているが，興味深いのは閉曲面上で面積分すると 2π の整数倍になるということである．

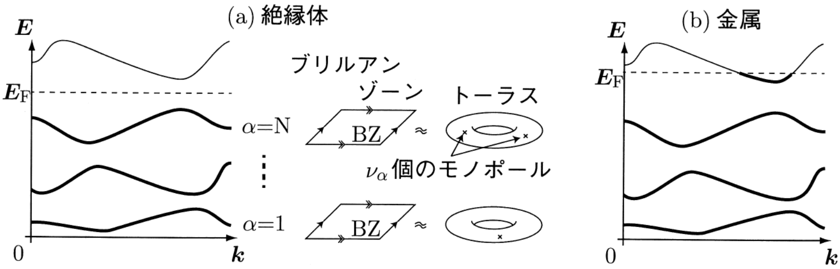


図２　(a) 絶縁体と (b) 金属のバンド構造の模式図．太線が絶対零度で充填されている状態．

これは有名な量子ホール効果の起源の説明の一つとなっている[11]．まず数学的な性質について述べる．球面やトーラス表面など境界のない面を閉曲面と呼ぶが，閉曲面 S 上で $\boldsymbol{b}_\alpha(\boldsymbol{k})$ の面積分

$$\int_S d\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{b}_\alpha(\boldsymbol{k}) \tag{9}$$

は，2π の整数倍になることが示せる．まず，もし面 S の全域にわたって単一の関数 $\boldsymbol{a}_\alpha(\boldsymbol{k})$ を用いて $\boldsymbol{b}_\alpha = \nabla_{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{a}_\alpha$ と書ければ，Stokes の定理によって式 (9) はゼロになる．別の場合として面 S を 2 つ以上の領域に分けて，領域ごとに別個の関数 $\boldsymbol{a}_\alpha^{(i)}$，$(i = 1, 2, \cdots$ は各領域を示す）で $\boldsymbol{b}_\alpha = \nabla_{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{a}_\alpha^{(i)}$ と書かれる場合があり，この場合は文献 12) などに詳述される手続きに従い，2π の整数倍となる．

式 (4) よりホール伝導率 σ_{xy} は $\boldsymbol{b}_\alpha(\boldsymbol{k})$ のみで表される．すなわち各状態 $\alpha, \boldsymbol{k}$ に対して $b_{\alpha z}(\boldsymbol{k})$ に充填率をかけて，全ての $\alpha, \boldsymbol{k}$ に関して和を取ったものが σ_{xy} になる．この結果の物性物理に関する帰結を考えよう．この量子化が効いてくるのは，フェルミエネルギーがバンドにかかっていない場合，すなわち絶縁体の場合である（図 2 (a) 左)．今後絶対零度を考える．この場合は図 2 (a) 左のように，下から数えて N 番目のバンドまでは完全に充填されており，それより上のバンドは完全に空いているとする．すると，

$$\sigma_{xy} = \frac{-e^2}{h} \sum_{\alpha=1}^{N} \int_{\mathrm{BZ}} \frac{d^2k}{2\pi} b_{\alpha z}(\boldsymbol{k}). \tag{10}$$

ここで BZ は，ブリルアンゾーン全体にわたって積分することを意味する．ブリルアンゾーンはその周期性から閉曲面をなすため前述のように

$$\nu_\alpha \equiv \int_{\mathrm{BZ}} \frac{d^2k}{2\pi} b_{\alpha z}(\boldsymbol{k}) = \int_{\mathrm{BZ}} \frac{d\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{k}}}{2\pi} \cdot \boldsymbol{b}_\alpha(\boldsymbol{k}) \tag{11}$$

は整数となる．この値をチャーン数と呼び，これはバンド毎に決まる整数である．なおブリルアンゾーンは位相的にはトーラスとみなせて，このチャーン数はちょうどそのトーラスの表面を貫く「波数空間の磁束密度」$\boldsymbol{b}_\alpha(\boldsymbol{k})$ の和，つまりこのトーラスの内部に囲まれている「波数空間のモノポール」の個数をカウントしていることになる（図 2 (a) 右)．チャーン数が量子化されているのは，モノポールの「磁荷」が量子化されているということとみなせる．すると，

$$\sigma_{xy} = \frac{-e^2}{h} \sum_{\alpha=1}^{N} \nu_\alpha \tag{12}$$

となり，ホール伝導率 σ_{xy} が e^2/h の整数に量子化されることが分かる．これは整数量子ホール効果に他ならない（なお，磁場を変化させたときにホール伝導度がこの量子化値でプラトーを示すことを説明するためには，不純物による局在を議論する必要があるが，ここでの主題から外れてくるのでこれ以上触れない)．なお金属の場合のバンド構造の模式図は図 2 (b) のようになり，フェルミエネルギーがバンドをよぎっている．そのためそのバンドに関しては，ベリー曲率の積分がブリルアンゾーン全体ではなく，フェルミ面内部での積分となって，σ_{xy} は量子化されない．

通常量子ホール状態といえば，半導体ヘテロ構造などで実現される 2 次元電子ガスに垂直に強磁場をかけて実現されるものを指す．一方上でいう

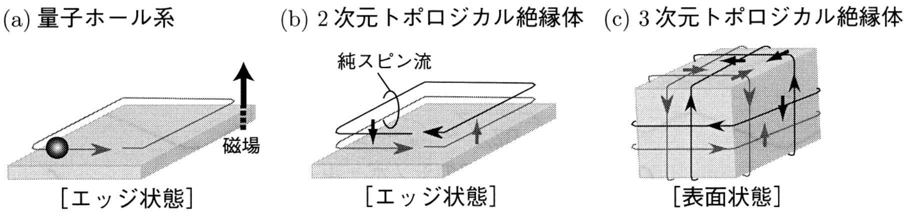


図3 量子ホール系とトポロジカル絶縁体の比較.

量子ホール状態はもっと一般的なものであり，強磁場中の2次元電子系はその中の一例になっている．強磁場中の2次元電子系の場合はよく知られているように，電子状態はランダウ準位と呼ばれるマクロな縮退度を持つバンドがとびとびに存在するようになる．この場合，各ランダウ準位はそれぞれ $\nu_\alpha = +1$ のチャーン数を持っていることが示せる．すると N 番目のランダウ準位まで電子がつまっている場合には

$$\sigma_{xy} = \frac{-e^2}{h}\sum_{\alpha=1}^{N}\nu_\alpha = -N\frac{e^2}{h} \qquad (13)$$

となり，よく知られている整数量子ホール効果の結果が得られる．

3. 半古典的運動方程式とエッジ・表面状態

こうしてホール伝導率が $\boldsymbol{b}_\alpha(\boldsymbol{k})$ を用いて表されることが分かったが，このままではあまり直観的な理解が明らかでない．ここを補うのが**半古典的運動方程式**であり，文献13)でベリー曲率との関わりが整理された．半古典的運動方程式では，実空間および波数空間でともにある程度局在している波束を考える．この波束の実空間での中心 $\boldsymbol{r}$ と，波数空間での中心 $\boldsymbol{k}$ とがどのように時間発展をするかを記述するのが半古典的運動方程式であり，電子が波でありバンド構造をなすことが考慮されている．これは次のようになる．

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial\varepsilon_{\alpha\boldsymbol{k}}}{\partial\boldsymbol{k}} - \dot{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{b}_\alpha, \qquad (14)$$

$$\hbar\dot{\boldsymbol{k}} = -e\boldsymbol{E}. \qquad (15)$$

ここで注目すべきなのは $\dot{\boldsymbol{r}}$ の運動方程式の第二項であって，ここにベリー曲率 $\boldsymbol{b}_\alpha(\boldsymbol{k})$ が入っている．つまりこの項は速度に付加的な補正項を与えるため，「異常速度」と呼ばれる．この異常速度項は $\dot{\boldsymbol{k}}\|\boldsymbol{E}$ に垂直になるため，ホール効果に寄与を与える．各状態が $f(\varepsilon_{\alpha\boldsymbol{k}})$ だけ充填されていることを考慮すると，ホール伝導率は式(4)と一致する．

この異常速度項は，量子ホール系でのエッジ状態の理解に役立つ[14)]．量子ホール系では上で述べたように絶縁体（図2(a)）であるが，よく考えてみると，試料全体で絶縁体ではどこにも電流が流れずホール効果は出てこないはずである．この疑問への答えは次のようになる．バルク（試料内部）は絶縁体であるが，試料の縁には局在した状態があり，その状態はフェルミエネルギーにかかっていて電流を運んでいる．このことは実験・理論両面でよく理解されていて，上の半古典的運動方程式からも説明できる[14)]．試料の縁には，電子が外に出ていかないように閉じ込めポテンシャル $U(\boldsymbol{r})$ の勾配があると考えることができる．そこから電子は内向きの力を受けるが，それは上の運動方程式の電場項と同様に，$\dot{\boldsymbol{k}}$ の右辺に入る．そのため，異常速度項が $\nabla U(\boldsymbol{r})$ に垂直向き，つまり試料縁に沿った形で生じる（図3(a)）．このエッジ電流は一方通行に試料端を流れていて，平衡状態では縁のどの場所でも同じ量のエッジ電流が循環している．もしこの試料の両端に端子をつけて電位差をつけるとこのエッジ状態の循環の均衡が破れるため，かけた電場に垂直向きの電流が生じる．詳しい計算をするとこれがちょうど上で与えているホール伝導度の量子化値に一致することが分かる．

なお，図1でホール効果とスピンホール効果の対応について述べたが，これと同様の対応によって，量子ホール効果から量子スピンホール効果[15~18)]が

導かれる．量子スピンホール効果を示すものをトポロジカル絶縁体と呼ぶ．図 3 (a) の量子ホール系からは，図 3 (b) の 2 次元トポロジカル絶縁体の存在が示唆され，その 3 次元版が図 3 (c) の 3 次元トポロジカル絶縁体となる．こうした系は理論的提案[15,16]の後種々の実験で実際に観測され，盛んに研究されている．こうした図 3 (b), (c) のトポロジカル絶縁体は，外部磁場ゼロで実現され，固体中のスピン軌道相互作用によって引き起こされる．

4. 様々な系でのホール効果とベリー曲率

このように電子系にバンド構造があると，ゲージ場の構造（ベリー曲率）を持ち，それがホール効果として現れることが分かった．バンド構造はすなわち波としての一般的な性質なので，これは電子系に限らず，他の種類の系にも普遍的に現れる．以下でいくつかの例を考えてみよう．

4.1 光のホール効果

例えば光についてもこうした効果があることが，文献 19〜21) で理論的に示されている．一様媒質中の光の分散は線型である．鋭い読者は，これは前述の「多バンド構造」ではなく単一バンドではないかと思われるかもしれない．分散だけからは確かに単一バンドのように見える．しかしこの場合は，光が横波であり縦波成分がこの図に入っていないことが，実質的に「多バンド構造」を生み出している．

別の言い方をすることもできて，光のスピンは $S=1$ であり，左円偏光は波数 $\boldsymbol{k}$ と平行なスピン，右円偏光は波数 $\boldsymbol{k}$ と反平行なスピンを持つ．このようにスピンが波数 $\boldsymbol{k}$ と平行ないし反平行の方向のみ許されるのは，電子系でいうとスピン軌道相互作用が無限に大きい極限のようなもので，これが自明でないベリー曲率をもたらす．詳しく計算するとこの場合のベリー曲率 $\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{k}}$ は左円偏光，右円偏光に対して $\boldsymbol{k}/k^3$, $-\boldsymbol{k}/k^3$ となる（なお詳しく言うとこのゲージ場は $SU(2)$ ゲージ場と呼ばれるもので，円偏光状態の表示では上で書いた要素を対角要素に持つ行列となっている）．すると，一様等方的媒質に対して，屈折率のゆるやかな空間変動を導入したとき，半古典的運動方程式は，

$$\dot{\boldsymbol{r}} = v(\boldsymbol{r})\hat{k} + \dot{\boldsymbol{k}} \times \langle z|\boldsymbol{b}(\boldsymbol{k})|z\rangle, \tag{16}$$

$$\dot{\boldsymbol{k}} = -k\nabla_{\boldsymbol{r}} v(\boldsymbol{r}), \tag{17}$$

$$|\dot{z}\rangle = -i\dot{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{a}(\boldsymbol{k})|z\rangle. \tag{18}$$

ここで $k=|\boldsymbol{k}|$, $v(\boldsymbol{r})=c/n(\boldsymbol{r})$ は点 $\boldsymbol{r}$ での屈折率 $n(\boldsymbol{r})$ から定まる光の速さで，c は真空中の光の速さ，$|z\rangle$ は光の偏光を表す 2 次元ベクトル，$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{k})$, $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{k})$ は前と同様にベリー接続（ゲージ場）とベリー曲率（場の強さ）である．

これが生み出す現象を考えてみよう．半古典的運動方程式 (16) の第 2 項は $\dot{\boldsymbol{k}}$ に比例するため，屈折率の空間変動がある場合（例えば異なる物質同士の界面など）において現れる．その向きは屈折率の勾配 $\nabla_{\boldsymbol{r}} n(\boldsymbol{r})$ と波数 $\boldsymbol{k}$ の外積の向きである．例えば空気と水の界面を考えると，その界面において現れ，その異常速度の向きは入射面に垂直である．そのため入射光と屈折光のビームは，媒質界面において入射面に垂直方向にずれる．このずれは左円偏光と右円偏光で逆向きになる．図 4 に，左円偏光の場合のずれを示す．なお反射光も同様にずれることが分かっている．このずれは実は昔から Imbert シフトとして知られており，実験でも観測されている[22,23]．

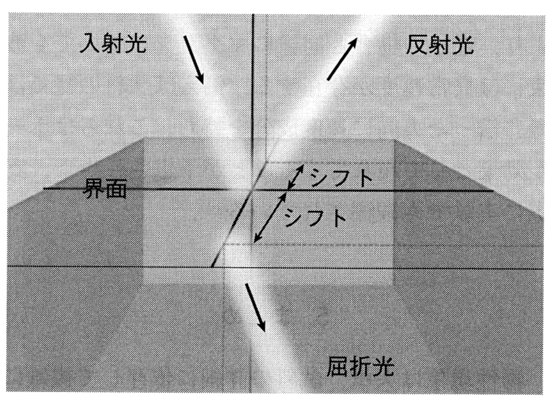


図 4　光のホール効果の模式図.

4.2 マグノンのホール効果

また別の例をあげることもできる．例えば強磁性絶縁体を考えると，スピンがそろった状態が基底状態で，そこから少しスピンを傾けた状態が励起状態となる．こうした励起状態はスピン波と呼ばれ，決まった波数をもち系の中を伝搬する．これも一般にバンド構造をなすため，上と同様にベリー曲率の構造を作り出すことが分かる．具体的に考えるため，例えばYIG（イットリウム鉄ガーネット）と呼ばれる強磁性絶縁体を考えよう．この物質においてはスピンの異方性は無視できる．この物質においては，薄膜を作った場合のスピン波のモードが以前より研究されており，そのスピン波の分散もよく分かっている．薄膜を作るとその形状の効果により，磁化の方向によって反磁場の効果が変化するため，スピン波（静磁波と呼ばれる）のバンド構造が生まれる．このバンド構造によるベリー曲率が，電子系と同様の効果を生み出すことが見出された[24]．

スピン波（マグノン）について半古典的運動方程式を立てると次のようになる．

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\partial \omega_{\alpha \boldsymbol{k}}}{\partial \boldsymbol{k}} - \dot{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{b}_{\alpha}, \tag{19}$$

$$\hbar \dot{\boldsymbol{k}} = -\nabla U(\boldsymbol{r}). \tag{20}$$

なお$U(\boldsymbol{r})$はマグノンに対する閉じ込めポテンシャルである．α 番目のバンドの角周波数を $\omega_{\alpha \boldsymbol{k}}$ とした．ここで分かるように，フェルミオンであり電荷を持つ電子と，ボゾンであり電荷を持たないマグノンとは全く性格が異なる粒子であるが，半古典的運動方程式がほぼ同じ形になる．これらにより，電子の場合と同様にマグノンについても波束には異常速度が存在する．例えば試料の縁では縁に沿った方向に速度成分を持ち，これらはホール効果として現れてくることが予想され[24,25]，実際に実験でも観測されている[26]．

5. まとめ

物性現象は大抵，試料の詳細に依存して複雑に変化する．その意味で，量子ホール系などで系の詳細によらず，ホール伝導度が普遍定数の整数倍に量子化されることは特異的であり，さらにこの裏にはベリー曲率，モノポールなどの微分幾何学的性質，トポロジカルな性質が隠れている．これらは電子の波動性に基づくため，電子系に限らず様々な系で見られる．このように見かけ上全く違う系にも普遍的に同様の構造が見られることは，まさに「隠れた物理法則」の宝庫であろう．

参考文献

1) 村上修一，永長直人，固体物理 **39** (2004) 27; 応用物理 **75** (2006) 342.
2) 村上修一，日本物理学会誌 **62** (2007) 2.
3) 村上修一，数理科学 **528** (2007) 14.
4) 村上修一，平原徹，松田巌，日本物理学会誌 **65** (2010) 840.
5) 村上修一，固体物理 **45** (2010) 477.
6) 永長直人，日本物理学会誌 **59** (2004) 520; N. Nagaosa, *J. Phys. Soc. Jpn.* **75** (2006) 042001.
7) S. Murakami, N. Nagaosa, and S.C. Zhang, *Science* **301** (2003) 1348.
8) J. Sinova *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004) 126603.
9) M.V. Berry, *Proc. R. Soc. London* **A392** (1984) 45.
10) A. Shapere and F. Wilczek, "Geometric Phases in Physics" (1989), World Scientific.
11) D.J. Thouless, M. Kohmoto, M.P. Nightingale, and M. den Nijs, *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982) 405.
12) M. Kohmoto, *Ann. Phys. (N.Y.)* **160** (1985) 355.
13) G. Sundaram and Q. Niu, *Phys. Rev. B* **59** (1999) 14915.
14) D. Xiao, M.-C. Chang, and Q. Niu, *Rev. Mod. Phys.* **82** 1959 (2010).
15) C.L. Kane and E.J. Mele, *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005) 226801; *ibid.* 146802.
16) B.A. Bernevig and S.-C. Zhang, *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 106802.
17) M.Z. Hasan and C.L. Kane, *Rev. Mod. Phys.* **82** (2010) 3045.
18) X.-L. Qi, S.-C. Zhang, *arXiv*:1008.2026.
19) M. Onoda, S. Murakami, N. Nagaosa, *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004) 083901.
20) M. Onoda, S. Murakami, N. Nagaosa, *Phys. Rev. E* **74** (2006) 066610.
21) 小野田勝，数理科学 **528** (2007) 20.
22) C. Imbert, *Phys. Rev. D* **5** (1972) 787.
23) O. Hosten, P. Kwiat, *Science* **319** (2008) 787.
24) R. Matsumoto and S. Murakami, *arXiv:* 1103.1221.
25) H. Katsura, N. Nagaosa, and P.A. Lee, *Phys. Rev. Lett.* **104** (2010) 066403.
26) Y. Onose *et al.*, *Science* **329** (2010) 297.

（むらかみ・しゅういち，東京工業大学大学院理工学研究科）

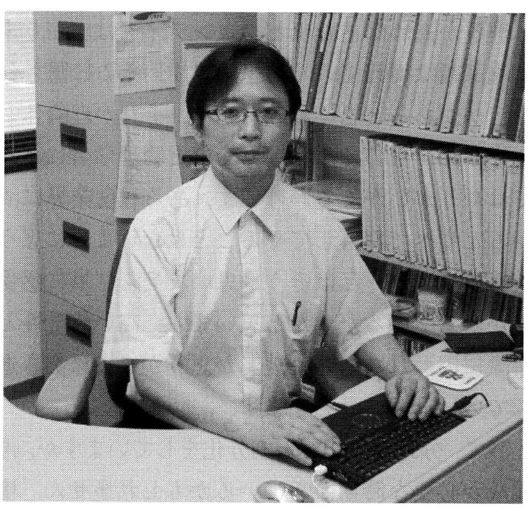
〈隠れた〉物理の面白さ

白水　徹也（質問：編集部）

1. 暗黒物質・暗黒エネルギーとは何か—最近のトピックについて

——近年，暗黒エネルギーなど，宇宙には存在しないとされてきたものに重要な意味が見出されておりますが，これによって今後の物理学（とくに宇宙物理）に，どのような変化がもたらされるのでしょうか．

実は暗黒エネルギーは昔からたびたび議論されてきました．昨年他界された林忠四郎先生と当時大学院生だった冨田憲二さんが，星の年齢と宇宙年齢との間の矛盾を解決するために，宇宙定数を解決策として導入したという約50年前の先駆的な研究があります．宇宙定数は暗黒エネルギーの候補の一つですね．林先生や佐藤勝彦先生らはこの宇宙定数にこだわりを持ち続けていました．偉大な方は違いますね．また20年前には銀河の数勘定から，どうも宇宙定数があったほうがよいとの指摘もありました．暗黒エネルギーの存在が決定的になったのはここ10年ほどの話です．それをきっかけに爆発的に研究が行われていますが，観測を除いて本質的な進展はないように思います．問題はその正体ですが，定数なら定数でなぜその値なのか．素粒子理論が予言する値は非常に大きなものとなります．量子重力が完成しないと分からないことかもしれません．また，定数ではなくある種の場，あるいは時空の理論に変更を迫るものであるなら，それらを決める指導原理がほしいものです．幸か不幸か現時点で万人を納得させる模型や指導原理はありません．



白水徹也氏.

多くの人が思っていることだと思いますが，暗黒エネルギーは相対論登場前に導入された“エーテル”と似ています．その意味で，暗黒エネルギーの存在は新しい時空の理論の存在を示唆しているかもしれません．これまでとは違う数学の言語が必要であり，その言語を用いると単純明快な指導原理が存在し，理論もびしっと決まる．そしてある近似下でアインシュタイン方程式や，現在行わ

れている研究で提案されているいずれかの模型が再現されることを夢見ています．もちろん究極の理論である超弦理論との折り合いもうまくいっているはず．第二のアインシュタインの登場を人類は待っている段階にあると思います．美しい理論が必ずあるはずです．最前線は大変厳しい過酷な環境にありますが，是非若い方々に挑戦してほしいものです．

一方で暗黒物質の有力候補はもちろん未知の素粒子だと思います．近い将来，超対称性の存在が実験で明らかになって，解決するのではないかと楽観的に私にはそう思えます．ただ，容易なことではありませんから他の可能性も追求することも重要だと思います．特に理論の研究は各人の自由に提案していただいたほうが無難だと思います．たくさんあるうちのどれかが正しければよいのではないかと思います．素粒子の標準模型も実験で検証されるまでには，様々な模型が提案されていたようで，ほとんどがゴミ箱入りとなったわけです．ではそのような営みに意味がなかったかというと，そうは思いません．

2.“隠れた”物理―歴史を振り返って

――物理学の歴史を振り返ってみると，アインシュタインが特殊相対性理論を発表する前は，“エーテル”が“隠れた”物理的存在として宇宙間に充満していたと考えられていたようですが，歴史上で他にもこれと似たような状況は多くあったのでしょうか．

電磁波は真空中をも伝わることは今日誰もが知っていることですが，20世紀前後それを想像することはとても難しかったことだと思います．どうしても伝わる媒質を考えたくなります．音の場合なら空気ですね．そんなこんなで“エーテル”が登場したわけです．結局のところエーテルは必要なく相対論がアインシュタイン一人によって作られたのですが，これほどの革命的な出来事は歴史的にはなかったように思います．なぜならそれが時空に関することだったからです．時空が物理学の対象になる瞬間ですね．ただ，視点を変えると“隠れた”ものはたくさんあります．ニュートンは万有引力を思いつきました．りんごと月に働く重力は同じだというわけです．天と地の統一的な理解です．それ以前は違う力が働いていたと考えるのがむしろ自然のようにさえ感じます．しかし，そこには重力に関する天と地の統一理論であるところの万有引力理論が隠されていたわけです．一般的にいくつかの系に対して統一的な理論が構成され，それが検証されれば，それがこれまで隠されていたという見方ができるわけです．私にとっては，ニュートン発見以前は万有引力という考え方も秘宝のように隠されていたと受け取れます．想像するだけでわくわくしますね！

3.“隠れた”物理の存在意義―諸分野における様々な例

――今回の特集では，上記で質問した“暗黒エネルギー”以外にも，多くの分野で重要な役割を果たす，様々な“隠れた”物理を紹介しておりますが，逆に言えば，それだけ物理にはたくさんの発展する元があると見てよろしいでしょうか．

理解が進めば進むほどフロンティアは広がり未解決課題は増えていくと思います．そこに隠された何かがあると思うわけですが，それが理論体系を揺るがすものであればあるほど物理学者にとってはやりがいがあるわけです．ある程度業界に漬かるとすべて理解してやることはないように思う人もいますが，私はそうは思いません．単に感受性が落ちているだけだと思います．高い感受性と常識に囚われない若い読者が思うがままに突き進んでいけばよいと思います．

さて，分野はどんどん細分化をしていますが，再編成が必要な時期がきているかもしれません．境界分野を唱うと研究予算の獲得がしやすくなって

いますが，一部の研究所を除いて大学の物理学科運営の実態はそれについていっていないように思います．もうそろそろ大きく変革を行う時期が到来しているかもしれません．若い世代のための環境づくりを（私より）上の世代がやっていくべきではないかと思っています．

4. 影響を受けたこと

――先生が研究者になるにあたって，影響を受けたことをお聞かせいただけますでしょうか．

高校時代に物理なんて全くわからないと思い込み勉強もせず0点をとってしまいました．これでは卒業できないと思って教科書を開いたら，少ない法則から様々な結果が導き出せることの便利さと美しさに感動しました．それ以降は物理に没頭したわけですが，この道に進むきっかけになったのは，学部時代にNHKで放映されていた「銀河宇宙オデッセイ」というシリーズ番組です．仮想的な宇宙船オデッセイ号で宇宙の様々な現象を「体験」するというものでした．その番組の中盤でホーキングの宇宙の量子生成論がとりあげられ，これは面白いと思い宇宙論への道を決めました．ちょうどホーキングブームの時代だったわけです．その番組では佐藤文隆さんや佐藤勝彦さんが日本の宇宙論のリーダー的な位置づけで登場していました．その影響で学部の卒論ではホーキングの論文を読んでまとめました．そして，卒業後幸運なことに佐藤文隆さん率いる京大の研究室に所属できましたが，文隆さんからは「そんな話（量子宇宙論）は10年前の話や」と言われショックを受けました．しかし，研究室では量子宇宙論を研究をしている先輩はいました．自由でとてもいい研究室でした．指導教員の言うことは聞かなくてもいいんだ，と（ごめんなさい！）．さて，その5年後に佐藤勝彦さんの，そして7年後にホーキングの率いる研究室に所属してしまったのですから，私へのホーキングの番組の影響は絶大なものだったのでしょうね．研究テーマもホーキングと彼の学生だったギボンズ（現ケンブリッジ大教授）の影響を強く受けています．兎に角マスコミの力はあなどれませんね．現在，たまたま院生時代の研究室（中村卓史さんが引き継いでいます）に戻っていますが，相変わらず院生が生意気で自由でいい感じです．よい伝統だと思います．

5. メッセージ

――この分野へ進もうと考えている学生や後進の方へ，何かアドバイスがありましたらメッセージをお願い致します．

面白いと思ったら徹底的に勉強してください．議論できる友人・先輩・後輩を持つことも大切です．自分の理解が正しいか否か，また考えを整理・精査するには議論が不可欠です．研究の進め方，生き方，などなど，多くの人の意見を聞いて，いいところ取りするとよいように思います．また自分の能力を理解することも必要だと思います．他人の庭は青く見えるといいますが，それでも自分で能力が低いと感じれば，努力で補ってみてください．私は院生の頃研究室ではあまりできるほうではありませんでした（と思います）．そこで，大学にほぼ泊り込んで研究を行っていました．賢い人たちには遊ぶ時間はあるが，自分にはないと思っていました．

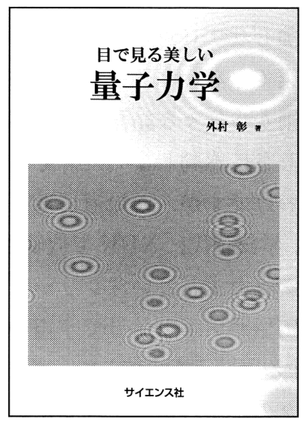
研究の最前線では各人ターゲットを絞って邁進します．5年同じことを続ければ，誰でもその専門家になれます．楽観主義であることも重要だと思います．実際の勉強，研究で挫折することもあるでしょう．そのとき理解できなくても，発想の転換で後で理解できることもたくさんありますので，あきらめずにしぶとく頑張るのがよいと思います．

（しろみず・てつや，京都大学大学院理学研究科）

目で見る美しい 量子力学

外村　彰　著　　　　　本体 2800 円

実験家の苦悩と喜び．そして，量子力学の真髄に触れる数々の実験の裏側で交わされた先駆者たちとの対話と成功の瞬間を，多くの写真とともに振り返った集大成．
「数理科学」誌の連載「目で見て学ぶ量子力学」（2008 年 4 月号～ 2010 年 8 月号（全 20 回））の待望の一冊化．



第 1 章　目で見るミクロの世界／第 2 章　ミクロの世界を探る電子線技術／第 3 章　渡辺宏にあこがれて日立中研に！／第 4 章　干渉性の良い電子の波―トンネル効果で針先から出る電子／第 5 章　目で見る波動関数／第 6 章　二重スリットの実験／第 7 章　二重スリットの実験のその後／第 8 章　アハラノフ・ボーム効果―触れてもいない磁場を感じる電子／第 9 章　アハラノフ・ボーム効果の検証実験／第 10 章　アハラノフ・ボーム効果その後／第 11 章　電子線ホログラフィー―光の波面として再現される電子の波面／第 12 章　電子波の位相を考える／第 13 章　電子の位相で見るミクロの磁力線―干渉電子顕微鏡／第 14 章　超伝導体で囲まれた磁束は量子化する！／第 15 章　超伝導電流が作る渦―磁束量子／第 16 章　磁力線の観察から超伝導を考える／第 17 章　超伝導体内部の磁束量子を見る／第 18 章　高温超伝導体の磁束量子を見る／第 19 章　見えないものを見る／第 20 章　量子力学の展開

サイエンス社

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

林　紘三郎

1981年7月号

約30年前に「生物工学―生物はどこまで機械か」の特集に書かせて頂いた「生体材料工学」と題する記事の中では，バイオマテリアル（今では生体組織や細胞などの生体内にある材料と区別して，生体用・医療用材料をこのように呼ぶことが多い）の概要，人工臓器の例として人工血管，人工弁，人工心臓を取り上げ，理数系に少しは関係するものとしてそれらの設計方法について述べた．これらのうち，人工血管と人工弁や，それらに使われる材料は，その後も本質的には変わっていない．人工心臓については，重篤な病変を生じた生体心臓を補助するための補助人工心臓の臨床応用が日常的になっているが，心臓を取り外して置換する（完全）人工心臓の利用は非常に限られており，臨床応用もきわめて少ない．最近では，かつての拍動血流を得るやや大型のタイプから，軸流ポンプや遠心ポンプなどの小型で非拍動性の人工心臓へと，開発方向が変わってきている．

これらの人工臓器に使われてきた材料は人工の材料であるが，人工物ではどうしても生体が持つ優れた性質，機能を実現することが非常に難しく，多くの問題が生ずる．そこで，ここ10年余りの間は，細胞や生体組織を利用したり，体外で臓器や組織を作り出すティッシュエンジニアリング（生体組織工学，組織再生工学）の研究が盛んに進められ，莫大な研究費が投じられている．しかしながら，皮膚などごく一部を除いては，実際に臨床的に利用できるものはまだできていない．

著者は，この20年余りの間に，バイオマテリアルや人工臓器よりも，生体の本質に迫ることができるうえに，臨床応用ができるバイオメカニクス[1]へと興味の対象が変わった．バイオメカニクスは，力学系学理に基盤を置いて生体組織や細胞の構造，機能を解析し，結果を医学，工学などに応用する分野である．この分野では数理科学と密接に関係するテーマも多く，例えば細胞や組織の構成法則や機能的適応現象の数理解析，臓器の病態生理現象や人工臓器と生体組織の相互作用の有限要素法解析など，非常に多くの研究が進められている．最近ではこの方面の研究を中心とする学術誌[2]も刊行されており，数理科学の専門家のインプットが求められている．



参考文献

1) 林紘三郎，『バイオメカニクス』，コロナ社，2008年（第5刷）．

2) “Biomechanics and Modeling in Mechanobiology”, Springer.

（はやし・こうざぶろう，岡山理科大学工学部）

情報幾何の新展開
脳と情報の数理科学

第7回

エントロピーとダイバージェンス

α, β, γ ダイバージェンス

甘利 俊一

これまで，2点間のダイバージェンスから出発して，空間に幾何学が導入できることを見てきた．とくに，凸関数から出発するBregmanダイバージェンスは双対平坦なリーマン構造を生んだ．また確率分布族（正測度の空間）にあっては，不変なダイバージェンスは f ダイバージェンスであることを明らかにした．今回は，これらのダイバージェンスの具体例として，α,β,γ の3ダイバージェンス族を取り上げ，その性質を述べておこう[1,2]．

ダイバージェンスが山盛りで，これら以外にもいろいろなものが定義できる[1]．こんなにたくさんダイバージェンスがあるのなら，応用に当たってどれを採用すればよいのか，という疑問が生ずる．もちろん扱う問題に応じて適切なものを選ぶしかないのだが，ここに挙げる3ダイバージェンスはいずれも良く使われ，よく知られているダイバージェンスを含む大切な族をなす．

一方，ダイバージェンスはエントロピーと深い関係にある．種々のダイバージェンスは，それぞれのエントロピーに関係する．一般化エントロピーから話を始めよう．

7.1 エントロピーとダイバージェンス

エントロピーは，確率分布 $\boldsymbol{p}=(p_0,p_1,\cdots,p_n)$ において，事象 X_i $(i=0,\cdots,n)$ のどれが現れるか，その不確定度を表す指標である．Shannonのエントロピーは

$$H_S[\boldsymbol{p}]=-\sum p_i\log p_i \tag{7.1}$$

で定義される．これは一様分布 $\boldsymbol{p}_0$

$$\boldsymbol{p}_0 = \frac{1}{n+1}(1, \cdots, 1) \tag{7.2}$$

において最大になり，

$$\max H_S[\boldsymbol{p}] = \log(n+1) = H_S[\boldsymbol{p}_0] \tag{7.3}$$

である．分布 $\boldsymbol{p}$ のエントロピーは，ここから一様分布 $\boldsymbol{p}_0$ への KL ダイバージェンスを用いると

$$KL[\boldsymbol{p} : \boldsymbol{p}_0] = H_S[\boldsymbol{p}_0] - H_S[\boldsymbol{p}] \tag{7.4}$$

の関係にある．すなわち分布 $\boldsymbol{p}$ のエントロピーは，$\boldsymbol{p}$ が一様分布 $\boldsymbol{p}_0$ までどのくらい離れているかで書けて

$$H_S[\boldsymbol{p}] = \log(n+1) - KL[\boldsymbol{p} : \boldsymbol{p}_0]. \tag{7.5}$$

そこで，一般のダイバージェンス $D[\boldsymbol{p} : \boldsymbol{q}]$ が与えられたときに，

$$H_D[\boldsymbol{p}] = H_D[\boldsymbol{p}_0] - D[\boldsymbol{p} : \boldsymbol{p}_0] \tag{7.6}$$

と置いて，これを D が定義するエントロピーと考えよう．

$$H_D[\boldsymbol{p}_0] = \max_{\boldsymbol{p}} H_D[\boldsymbol{p}] \tag{7.7}$$

となる．ダイバージェンス $D[\boldsymbol{p} : \boldsymbol{q}]$ が $\boldsymbol{p}$ に関して凸であれば，ここから得られるエントロピーは凹関数になる．

α ダイバージェンス

$$D_\alpha[\boldsymbol{p} : \boldsymbol{q}] = \frac{4}{1-\alpha^2}\left(1 - \sum p_i^{\frac{1-\alpha}{2}} q_i^{\frac{1+\alpha}{2}}\right) \tag{7.8}$$

から得られるエントロピーを α エントロピーと呼ぶ．これは，スケールと定数をうまく定めれば

$$H_\alpha[\boldsymbol{p}] = \frac{2}{1-\alpha}\left\{\sum p_i^{\frac{1-\alpha}{2}} - 1\right\} \tag{7.9}$$

となる．$\alpha = -1$ の極限を取れば，Shannon エントロピーであり，$\alpha = 1$ の極限を取れば，スケールと定数を除いて

$$H_1[\boldsymbol{p}] = \sum \log p_i \tag{7.10}$$

となる．

α エントロピーはこれまでにもよく知られていた[3)]．Rényi エントロピー[4)]は

$$H_{R,\alpha}[\boldsymbol{p}] = \frac{2}{1-\alpha} \log \sum p_i^{\frac{1-\alpha}{2}} \tag{7.11}$$

で定義されるもので，(7.9) の H_α とは単調な関数関係で結ばれている．また，α エントロピーは，物理学者 Tsallis が Boltzmann–Gibbs の法則に従わない複雑な物理現象を解明するために導入した Tsallis エントロピーと同じものである[5)]．これは log 関数（その逆関数である指数関数）の代わりに，冪乗則に

従う現象と関連して注目を集めている．これはスケール不変な現象を表現するものとして知られている*1)．

逆に，一般化したエントロピーからダイバージェンスを導くこともできる．いま，$H(\boldsymbol{p})$ が複雑さを表す凹関数だったとしよう．このとき，Bregman ダイバージェンスが

$$D_H[\boldsymbol{p}:\boldsymbol{q}] = -H(\boldsymbol{p}) + H(\boldsymbol{q}) + \nabla H(\boldsymbol{q}) \cdot (\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \tag{7.13}$$

で導かれる．ここで，$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}_0$ と置けば，

$$D_H[\boldsymbol{p}:\boldsymbol{p}_0] = H(\boldsymbol{p}_0) - H(\boldsymbol{p}) \tag{7.14}$$

となるから，このダイバージェンスから導かれるエントロピーは元のものに一致して，整合性が取れる．

情報理論で重要なクロスエントロピーは

$$H_S[\boldsymbol{q}|\boldsymbol{p}] = -\sum p_i \log q_i \tag{7.15}$$

である．一般の場合これを

$$H_D[\boldsymbol{q}|\boldsymbol{p}] = D[\boldsymbol{p}:\boldsymbol{q}] + H_D[\boldsymbol{p}] \tag{7.16}$$

で定義すればよい．

これから，α ダイバージェンスだけでなく，β ダイバージェンスなど，いろいろなダイバージェンスを導入するが，それぞれに β エントロピー，β クロスエントロピーなどが定義できる．

7.2 f ダイバージェンス，α ダイバージェンス，KL ダイバージェンス

確率変数の変換に関して不変な（分解可能な）ダイバージェンスは f ダイバージェンスであった．この中で，正測度の空間で双対平坦になるものは α ダイバージェンスであり，その典型例が KL ダイバージェンスである．これは確率分布の空間で双対平坦になる唯一のものであった．まず，f ダイバージェンスの性質をいくつか挙げておく．標準 f 関数を用いた f ダイバージェンスは

$$D_f[\boldsymbol{p}:\boldsymbol{q}] = \sum p_i f\left(\frac{q_i}{p_i}\right) \tag{7.17}$$

と書ける．これは，どれも Fisher 情報行列を計量とするリーマン空間を導く．f ダイバージェンスは，次の性質を満たす．

1. 凸性：f ダイバージェンスは変数 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ に関して凸である．

---

*1) α エントロピーは加法性を満たさない．すなわち，2 つの確率変数 X, Y が独立であると，Shannon エントロピーは加法性

$$H_S(X,Y) = H_S(X) + H_S(Y) \tag{7.12}$$

が成立するが，$\alpha \neq \pm 1$ の α エントロピーは加法性を満たさない．

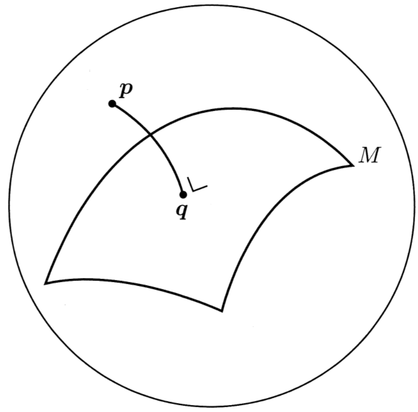


図 7.1　$\boldsymbol{p}$ の M への射影.

2. f ダイバージェンスの上界：

$$0 \le D_f[\boldsymbol{p} : \boldsymbol{q}] \le \lim_{u \to 0} \left\{ f(u) + uf\left(\frac{1}{u}\right) \right\}, \tag{7.18}$$

$$0 \le D_f[\boldsymbol{p} : \boldsymbol{q}] \le \sum (p_i - q_i)\, f'\left(\frac{p_i}{q_i}\right). \tag{7.19}$$

f ダイバージェンスで正測度空間に拡大したときに双対平坦性を持つものが α ダイバージェンスで，これは (7.8) を拡張して，

$$D_\alpha\,[\boldsymbol{p} : \boldsymbol{q}] = \frac{-4}{1-\alpha^2} \sum \left(p_i^{\frac{1-\alpha}{2}} q_i^{\frac{1+\alpha}{2}} - \frac{1-\alpha}{2} p_i - \frac{1+\alpha}{2} q_i \right) \tag{7.20}$$

これには，次の性質が言える．

3. $\alpha \ge 1$ のとき，$p(x) = 0$ となる x で，$q(x) \ne 0$ となっていれば

$$D_\alpha[\boldsymbol{p} : \boldsymbol{q}] = \infty \tag{7.21}$$

（x が連続変数のときには，この条件は，$q(x)$ が $p(x)$ に関して絶対連続であると言い変えて良い）．

4. $\alpha \le -1$ のとき，$p(x) \ne 0$ となる x で $q(x) = 0$ であれば，

$$D_\alpha[\boldsymbol{p} : \boldsymbol{q}] = \infty \tag{7.22}$$

（x が連続変数のときには，この条件は，$q(x)$ が $p(x)$ に関して絶対連続であると言い変えて良い）．

この 2 つの性質は，推論のときに使う射影において，**0 回避**および **0 強制**の性質となって現れる．いま，分布 $\boldsymbol{p}$ と確率分布のモデル $M \subset S_n$ が与えられたとし，M の中の分布で $D[\boldsymbol{p} : \boldsymbol{q}]$ を最小化する意味で $\boldsymbol{p}$ に一番近い分布を求めるとしよう（図 7.1）．これを $\boldsymbol{p}$ から M への射影と言う．双対平坦な空間では，これは双対測地線による射影であった．このとき，上記の 2 つの性質は，

5. $\alpha \ge 1$ のとき，射影で得られる q は 0 強制で，$p(x) = 0$ となる x では

$q(x)=0$ である．

6. $\alpha \leq -1$ のとき，射影で得られる q は 0 回避で，$p(x) \neq 0$ となる x では $q(x) \neq 0$ である．

上記の 2 つの性質は，KL ダイバージェンス $(\alpha=-1)$ とその順序をかえたもの $(\alpha=1)$ でも成立する．KL ダイバージェンスは確率分布空間における唯一の不変双対平坦な族であった．

7.3 β ダイバージェンス

不変性を無視すれば，任意の凸関数 $\psi(\boldsymbol{p})$ を用いて，確率分布 $\boldsymbol{p}$ の空間 S_n に Bregman ダイバージェンスが導入できる．ここから，関連したエントロピーも

$$H_\psi(\boldsymbol{p})=H_\psi\left(\boldsymbol{p}_0\right)-D_\psi\left[\boldsymbol{p}:\boldsymbol{p}_0\right] \tag{7.23}$$

と導ける．

ここで，単調関数 $k(u)$ を用いて

$$r_i=k\left(p_i\right) \tag{7.24}$$

を確率の表現としよう．正測度の空間では，p_i の代わりに m_i から (7.24) で出る r_i を新しい座標として用いる．確率分布の空間は正測度の空間の部分空間で，

$$\sum k^{-1}\left(r_i\right)=1 \tag{7.25}$$

をみたす．これは一般には $\boldsymbol{r}$ を座標とする空間の超曲面，すなわち曲っている．

いま，r の凸関数 $\varphi(r)$ を用いて，$\boldsymbol{r}$ の凸関数

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\sum \varphi\left(r_i\right) \tag{7.26}$$

を導入しよう[6)]．こうすると，空間にダイバージェンス

$$D_\varphi[\boldsymbol{r}:\boldsymbol{s}]=\varphi(\boldsymbol{r})-\varphi(\boldsymbol{s})-\nabla\varphi(\boldsymbol{s})\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}) \tag{7.27}$$

が導入される．ここから得られるリーマン計量は，一般には Fisher 情報行列にはならない．不変性が成立しないからである．しかし，空間は双対平坦で，アファイン座標系は $\boldsymbol{r}$，双対アファイン座標系は Legendre 変換によって得られる

$$\boldsymbol{r}^*=\nabla\varphi(\boldsymbol{r}) \tag{7.28}$$

である．

これは江口ら[6)]が U ダイバージェンスと呼んだ一般の場合である．簡単な場合は確率の表現としては $\boldsymbol{p}$ 自身を用い，凸関数として実パラメータ β を含む

$$\varphi_\beta(t)=\begin{cases}\frac{1}{\beta(\beta-1)}\left(t^\beta-\beta t+\beta-1\right), & \beta \neq 0,1, \\ t \log t-t+1, & \beta=1, \\ t-\log t-1, & \beta=0\end{cases} \tag{7.29}$$

を用いる．これは巾乗関数（極限を除く）であり，α 表現と同種のものであるが，使い方が違う．このとき凸関数

$$\varphi_\beta(\boldsymbol{p}) = \sum \varphi_\beta\left(p_i\right) \tag{7.30}$$

から導かれるダイバージェンスを β ダイバージェンスという．空間 S_n は，$\boldsymbol{p}$ をアファイン座標として平坦，さらに Legendre 変換である $\boldsymbol{p}^*$，

$$p_i^* = \begin{cases} \frac{1}{\beta-1} p_i^{\beta-1} - \beta, & \beta \neq 1, \\ \log p_i, & \beta = 1 \end{cases} \tag{7.31}$$

を双対座標として双対平坦である[6]．

β ダイバージェンスを陽に書けば

$$D_\beta[\boldsymbol{p}:\boldsymbol{q}] = \begin{cases} \sum_i \left\{ \frac{p_i^\beta - q_i^\beta}{\beta} - \frac{p_i^{\beta+1} - q_i^{\beta+1}}{\beta+1} \right\}, & \beta \neq 0, 1, \\ \sum_i \left\{ p_i \log \frac{p_i}{q_i} - p_i + q_i \right\}, & \beta = 0, \\ \sum_i \left\{ \log \frac{q_i}{p_i} + \frac{p_i}{q_i} - 1 \right\}, & \beta = -1 \end{cases} \tag{7.32}$$

のようになる．ここから β エントロピーは

$$H_p(\boldsymbol{p}) = -\sum \left(\frac{1}{\beta} p_i^\beta - \frac{1}{\beta+1} p_i^{\beta+1} \right) + c, \quad 0 < \beta < 1 \tag{7.33}$$

のように定義される．$\beta = 0$ のときはこれは Shannon エントロピー，

$$H_{\beta=1}(\boldsymbol{p}) = H_S(\boldsymbol{p}), \tag{7.34}$$

である．

β ダイバージェンスは，$\beta = 1$ のときはユークリッド距離の 2 乗を与え，$\beta = 0$ のときに KL ダイバージェンスになるが，それ以外は α ダイバージェンスとは別のものである．また，$\beta = -1$ のときは板倉–斉藤のダイバージェンスと呼ばれ，音声のスペクトルをもとにする識別で使われている．すなわち，これはユークリッド距離の 2 乗，KL ダイバージェンス，板倉–斉藤ダイバージェンスを結ぶ族である．

β ダイバージェンスが導く S_n の幾何学は，一般に不変ではないが，双対平坦である．なお，β ダイバージェンスは $\boldsymbol{p}$ に関して凸であるが，$\boldsymbol{q}$ に関しては一般には凸でない．

双対平坦の空間では，ピタゴラスの定理，射影定理などが成立するので，応用上いろいろと有用であり，β ダイバージェンスも多用されている．

β ダイバージェンスは，統計的な推論においてロバストな推定量を導くものとして，江口らによって導入された．ただ，他にも多くの研究者が提唱し，使っている．江口らは，これをロバストな独立成分分析（ICA）に使って成果を上げるとともに[6]，機械学習に用いて研究を進めている[7]．

7.4 α-β ダイバージェンス

2つの重要なダイバージェンス族 α および β ダイバージェンスを統合する α-β ダイバージェンスを甘利，Cichocki らが導いた[2,8)]．$\tilde{\alpha}$-$\tilde{\beta}$ ダイバージェンスとは

$$D_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}[\boldsymbol{p}:\boldsymbol{q}]=\frac{1}{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\left(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}\right)}\sum\left\{\tilde{\alpha}p_i^{\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}}+\tilde{\beta}q_i^{\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}}-(\alpha+\beta)p_i^{\tilde{\alpha}}q_i^{\tilde{\beta}}\right\}. \tag{7.35}$$

明らかに

$$\tilde{\alpha}=\frac{1-\alpha}{2},\quad \tilde{\beta}=\frac{1+\alpha}{2},\quad \tilde{\alpha}+\tilde{\beta}=1 \tag{7.36}$$

のときには，これは α ダイバージェンスに他ならない．また

$$\tilde{\alpha}=1,\quad \tilde{\beta}=\beta-1,\quad \tilde{\alpha}+\tilde{\beta}=\beta \tag{7.37}$$

とおけば，これは β ダイバージェンスになる．

この他に，両者の中間の多くのものがこの族に入る．しかし，α-β ダイバージェンスが定義する空間は，一般に不変でもなければ平坦でもない．

α-β ダイバージェンスは，実はこれ以外にも定義できる．歴史的には Jun Zhang α 幾何学を拡張しようとしてこれを試みた[9)]．彼が定義した α-β ダイバージェンスは

$$\begin{aligned}D_{\mathrm{Zhang}}^{\alpha,\beta}[\boldsymbol{p}:\boldsymbol{q}] = \frac{4}{1-\alpha^2}\frac{2}{1+\beta}\sum\Bigg\{&\frac{1-\alpha}{2}p_i+\frac{1+\alpha}{2}q_i\\&-\left(\frac{1-\alpha}{2}p^{\frac{1-\beta}{2}}+\frac{1+\alpha}{2}q_i^{\frac{1-\beta}{2}}\right)^{\frac{2}{1-\beta}}\Bigg\}\end{aligned} \tag{7.38}$$

である．しかし，ここから出てくる幾何学は標準形の α 幾何学である．

これ以下に，Jun Zhang は Bregman 型の α ダイバージェンス，すなわち凸関数 φ に対して，

$$\begin{aligned}D_{\varphi}^{\alpha}[p(x):q(x)] = \frac{4}{1-\alpha^2}\int\Bigg\{&\frac{1-\alpha}{2}\varphi(p)+\frac{1-\alpha}{2}\varphi(q)\\&-\varphi\left\{\frac{1-\alpha}{2}p+\frac{1+\alpha}{2}q\right\}\Bigg\}dx\end{aligned} \tag{7.39}$$

を定義している．

一方古市は

$$D_{\mathrm{Furuichi}}^{\alpha,\beta}[\boldsymbol{p}:\boldsymbol{q}]=\frac{1}{\alpha-\beta}\sum\left(p_i^{\alpha}q_i^{1-\alpha}-p_i^{\beta}q_i^{1-\beta}\right) \tag{7.40}$$

のように定義し，その性質を論じている[10)]．

7.5 γ ダイバージェンス

γ ダイバージェンスは藤沢と江口が提案したもので[11)]，γ をパラメータとして

$$D_\gamma[\boldsymbol{p}:\boldsymbol{q}] = \frac{1}{\gamma(\gamma-1)} \log \frac{\sum p_i^\gamma \left(\sum q_i^\gamma\right)^{\gamma-1}}{\left(\sum p_i q_i^{\gamma-1}\right)^\gamma} \tag{7.41}$$

で定義される．これは正測度空間で定義されるが，$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ をそれぞれ $c_1\boldsymbol{p}$, $c_2\boldsymbol{q}$ に変えても不変という，射影的な性質を持つ．

$$D_\gamma[c_1\boldsymbol{p}:c_2\boldsymbol{q}] = D_\gamma[\boldsymbol{p}:\boldsymbol{q}]. \tag{7.42}$$

さらに，これを用いた統計的推論は超ロバスト性を持つ．超ロバスト性とは，非常に大きい“はずれ値”（アウトライアー）がデータに混入したときに，その影響が無視できるという性質である．

終わりの一言

今回はダイバージェンスの総ざらいを行った．Cichocki らのモノグラフ[8)]には，多くのダイバージェンスとその性質および応用が詳述されている．こんなにたくさん出てきて困ると感じるのももっともであるが，応用分野では目的に応じていろいろなものを使えるほうがよい．ここでは述べなかったが，Tsallis のエントロピーに由来するエントロピーとダイバージェンスの数理[12)]，さらにトータル Bregman ダイバージェンスなどがあり，共形変換の幾何学に対応する．次回からは統計的推論の情報幾何に入っていこう．

参考文献

1) A. Cichocki, R. Zdunek, A.H. Phan and S. Amari, *Nonnegative matrix and tensor factorizations*, John Wiley and Sons, U.K, 2009.
2) A. Cichocki, S. Cruces and S. Amari, Generalized alpha-beta divergences and their application to robust nonnegative matrix factorization, *Entropy*, **13**, 134–170, 2011.
3) H. Chernoff, A measure of asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on a sum of observations, *Ann. Math. Statist.*, **23**, 493–507, 1952.
4) A. Rényi, On measures of entropy and information, in Proc. 4th Symp. Math. Statist. Probl., Berkeley, CA, 1, 547–561, 1961.
5) C. Tsallis, Possible generalization of Boltzmann–Gibbs statistics, *J. Statist. Phys.*, **52**, 479–487, 1988.
6) M. Minami and S. Eguchi, Robust blind source separation by beta-divergence, *Neural Computation*, **14**, 1859–1886, 2004.
7) 村田昇，『情報理論の基礎』，SGC ライブラリ **37**，サイエンス社，2005.
8) A. Cichocki and S. Amari, Families of Alpha- Beta- and Gamma- divergences: flexible and robust Measures of similarities, *Entropy*, **12**, 1532–1568, 2010.
9) J. Zhnag, Divergence function, duality and convex analysis, *Neural Computation*, **16**, 159–195, 2004.
10) S. Furuichi, An axiomatic characterization of a two-parameter extended relative entropy, *J. Math. Physics*, **51**, 2010.
11) H. Fujisawa and S. Eguchi, Robust parameter estimation with a small bias against heavy contamination, *Multivariate Analysis*, **99**, 2053–2081, 2008.
12) 須鎗弘樹，『複雑系のための基礎数理』，牧野書店，2010.

（あまり・しゅんいち，理化学研究所脳科学総合研究センター）

リレー連載 人物で学ぶ数学 創始者の思考で学ぶ 第5回

ネーター

環論

後藤　四郎

私の知っているエミー・ネーター(Emmy Noether)は，お父さんのマックス・ネーター(Max Noether)と同様に数学者であるが，レン・フィッシャーの『魂の重さは何グラム？』という面白い題名の本の中では，エミー・ネーターは物理学者として紹介されている．アインシュタインは，エミー・ネーターを「物理学の発展にもっとも貢献した数学者の一人」と評していたそうであるが，物理学者としてのネーターの業績を紹介することは，私の手に負える仕事ではないので，ここではフィッシャーの書物から引用しようと思う[5, P.237–238]．

20世紀のはじめに，ドイツの物理学者エミー・ネーター（当時の科学界で活躍していた数少ない女性の一人）は運動量の保存の根底にあるもっとも驚きにみちた謎を発見した．彼女は物理法則が「軸の平行移動」のもとで変化しないという事実から，この原理が直接に導かれることを示した——言いかえると，もしあなたが地面に立っていてある法則が成り立つとすれば，あなたが飛行機で一定の速さで地面の上を飛んでいるときにも同じ法則が成り立つのである．たとえ飛行機が時速800キロメートルで飛んでいても，サンドイッチがトレイを滑ったり，あるいは飲み物が膝にこぼれたりしないのは，このためである．

エミー・ネーターはさらに角運動量の保存則も，基準系の回転によって物理法則が変わらないという事実から同じように導けることを示した．この鋭い洞察に対してネーターがノーベル賞を授けられなかったのは，科学は主として男の領分であった（現在もそうだ）ことの悲しい反映である．

数学の分野ではネーターの名前は，今日でも「ネーター環」と呼ばれる環構造論の中に残されている．



エミー・ネーター．

とくに“The Mother of Modern Algebra”と題する，M.B.W.テントによる彼女の伝記[11]には，数学者としての，指導者としての，ネーターの感動的な姿が生き生きと描き出されているので，一読をお勧めする．現代の代数学はネーターが創り始めた抽象代数学の塊のような存在である．ここでは，私がこれまでにわずかながら学んできた可換環論を例に引いて，ネーターの仕事を紹介し，あわせて現代可換環論の入り口をお見せしたいと思う．

可換環とは，数や函数の集合のように，和と積が定義されていて，加・減・乗の3法を自由に行うことのできる対象である．このような「数学的構造」は整数論や解析学では自明に付与されたものであるが，環構造に限らず多様な場面に共通に現れる数学的構造を抽象化し，複雑な数学的現象のある部分を統一的に理解しようする営みは，決して古い歴史を持つわけではなく，ヒルベルト[7]を先駆者としながらエミー・ネーターが起こした革命であった．彼ら以前は猛烈に具体的な「計算の時代」であったと考えられている．1922年以降，ゲッチンゲン大学におけるネーターの講義や研究活動・日常がどのようなものであったか，テントの書物に活写されている．ネーターの最愛の学生の一人であったファン・デア・ヴェルデンの著書“Modern Algebra”[12]はゲッチンゲンにおけるネーターの講義と思想をまとめた書物であって，1931年に出版されている．45年前，私が学部学生であった頃はもちろん，長期にわたり，代数学に志す者にとって必読の書であった．今日ではいくつかの分野に分化した代数学が，まとまった一つの世界として提示されていることは印象的である．

可換環論に関して言えば，「専門家」が現れたのは，20世紀の中葉を過ぎてからのことである．ファン・デア・ヴェルデン以降それまでは，代数幾何学といった他の古典的な分野で働く人々が必要に迫られ，てんでに必要な理論を展開していたというのが正しい評価であろう．最近では優れた本格的な専門書(文献1〜4,6,8)など，これらの書物の文献表も参照されたい)が多数出版されているが，ファン・デア・ヴェルデン以降で古典的な書物は，O.ザリスキとP.サミュエルの共著書“Commutative Algebra I, II”(1942)である．Zariski–Samuel[13,14]は20世紀前半までの知見を踏まえて，代数幾何学の基礎理論として可換代数を展開したものであり，同分野の基礎付けをするという強い意志がはしばしに感じられる．この書物のVol.Iは5章よりなり，第4章のタイトルはNoetherian ringであって，可換なネーター環の基礎理論が述べられている．

硬くなるが，少し数学の話をしよう．

空でない集合 R が可換環であるとは，R 上に2つの演算（加法 $+$ と乗法 $\cdot$）が定められていて，以下に述べる(1)から(5)の公理を満たすことを言う．

(1) R は加法 $+$ についてアーベル群をなす．

(2) 乗法については結合法則が成り立つ．即ち任意の $a,b,c\in R$ について $(ab)c=a(bc)$ である．

(3) 分配法則が成り立つ．即ち任意の $a,b,c\in R$ について $a(b+c)=ab+ac$, $(a+b)c=ac+bc$ が成り立つ．

(4) ある特殊な元 $1\in R$ が含まれていて，任意の $a\in R$ に対して $a1=1a=a$ が成り立つ．

(5) 乗法については交換法則が成り立つ．即ち任意の元 $a,b\in R$ について $ab=ba$ である．

ここで条件(4)に現れる1は，環 R の単位元と呼ばれ，R 内で一意的に定まる．

可換環のモデルとしては，整数の全体 $\mathbb{Z}$ や有理数の全体 $\mathbb{Q}$，実数の全体 $\mathbb{R}$ や複素数の全体 $\mathbb{C}$ といった集合を念頭におくとよいし，実係数の変数 x に関する多項式の全体 $\mathbb{R}[x]$ や1変数の実函数の全体といった集合をモデルにおくと，可換環とはどのようなものであるか把握しやすいと思う．

可換環 R に対しては，加法と乗法しか言及されていないが，もちろん引き算も定義される．元 $a,b\in R$ に対し，$-b$ によって元 b の加法についての逆元を表すとき，$a-b=a+(-b)$ によって減法が定義される．

大切なことは，ありふれた対象である「和と積

がとりあえず定義されている集合」を公理化して可換環という共通の視点から解析し，何らかの（結果としては，驚くべき）理論が展開できるということを，今日に至るはるかな洞察として見抜き，創り出すために全力を挙げた最初の人物がエミー・ネーターであったということである．このような革命的な営みの重さを説明するのは容易でないが，頑張って努力してみたい．

イデアルの話をしよう．可換環 R の空でない部分集合 I は，次の条件を満たすとき，R のイデアルであるという：任意の $a \in R$ と任意の $x, y \in I$ について，$x + y, ax \in I$ である．

例えば，元 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$ に対して

$$I = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i a_i \;\middle|\; x_i \in R \right\}$$

とおけば，I は R のイデアルである．このようなイデアル I は $a_1, a_2, \ldots, a_n$ で生成されたイデアルと呼ばれ，$I = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ と表記される．環 $\mathbb{Z}$ で言えば，整数 $a \in \mathbb{Z}$ に対して $(a) = \{na \mid n \in \mathbb{Z}\}$ であって，環 $\mathbb{Z}$ のイデアル I がすべてこのような形をしていることは容易に確かめることができる．可換環 R のイデアル I に対し，ある有限個の元 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$ が存在して等式 $I = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ が成り立つとき，イデアル I は有限生成であると呼ばれる．何のためにこのようなことを考え，このような定義に至ったか，後付けの説明ならできるかもしれないが，自分がやれと言われたとして，想像を超えるところがある．

可換環 R がネーター環であるとは，次の互いに同値な3条件を満たすことをいう．

定理 1. R は可換環とすると，次の3条件は同値であって，このとき R はネーター環であるという．

(1) 環 R 内のイデアルはすべて有限生成である．

(2) 環 R 内にはイデアルの真の昇鎖 $I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \cdots \subsetneq I_k \subsetneq \cdots$ は存在しない．

(3) $\mathcal{F}$ によって R 内のイデアルの全体からなる集合を表すとき，$\mathcal{F}$ の空でないいかなる部分集合 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$ も，集合の包含関係に関する極大元 $I \in \mathcal{S}$ を少なくとも一つは含む．

条件 (2) はイデアルに関する昇鎖律，条件 (3) は極大条件と呼ばれている．この定理（定義）こそ，環 R に含まれるイデアルたちの挙動に，環 R の付与の特質が表出することを示した最初の主張である．

極端に単純化して言えば，定理1は環 $\mathbb{Z}$ の持つ特質の一つを強引に抽象化したものである．このような抽象化がいかに優れた着想であったかは，その後にどのように豊かな理論が展開されたかで検証することができる．

さて，読者とともに，定理1の証明を楽しもう．

証明. (1) ⇒ (2) 環 R 内にイデアルの昇鎖 $I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \cdots \subsetneq I_n \subsetneq \cdots$ があったとする．このとき $J = \bigcup_{n \geq 1} I_n$ とおくと，J は R のイデアルとなる．仮定 (1) によって，J は有限生成であるから，有限個の元 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$ があって $J = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ が成り立つ．番号 $k \gg 0$ を $a_1, a_2, \ldots, a_n \in I_k$ となるようにとると，$J \subseteq I_k$ が成り立つので，$J = I_k = I_l$ が任意の番号 $l \geq k$ に対して成り立つが，これは不可能である．

(2) ⇒ (3) $\mathcal{S}$ 内に極大元がないならば，$I_1 \in \mathcal{S}$ を任意にとると，あるイデアル $I_2 \in \mathcal{S}$ があって $I_1 \subsetneq I_2$ となるはずである．この操作は何回でも繰り返せるから，(2) に反して環 R 内にイデアルの真の昇鎖 $I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \cdots \subsetneq I_k \subsetneq \cdots$ が含まれていることになる．

(3) ⇒ (1) R 内に有限生成でないイデアル I があったとする．I に対して $\mathcal{S} = \{J \mid J$ は R の有限生成なイデアルであって $J \subseteq I\}$ とおくと，$\{0\} \in \mathcal{S}$（0 は R の加法についての単位元である）であるから，$\emptyset \neq \mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$．よって $\mathcal{S}$ 内には包含関係について極大なイデアル J が含まれている．J は有限生成であるが，I はそうではないので，$J \subsetneq I$ である．従って元 $a \in I \setminus J$ を取ることができる．$J = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ となる $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$ をあら

かじめ選んでおいて，さらに $a=a_{n+1}$ とおいてイデアル $K=(a_1,a_2,\dots,a_n,a_{n+1})$ を考えると，$J\subsetneq K\subseteq I$ で $K\in\mathcal{S}$ となるが，これはイデアル J が集合 $\mathcal{S}$ 内で極大であることに反する．ゆえに R 内のイデアルはすべて有限生成である．□

エミー・ネーターは偉大な人であった．1922年以降のゲッチンゲン時代，彼女の周りには後輩や学生たちがあたかも護衛のように付きまとい，夜遅くまで議論と数学に熱中していたという．これらの人々は "The Noether Boys"（女性も含めて）と呼ばれたらしい．ネーターを知らず彼女に傾倒していない人々の目には，さぞ異様な光景に見えたことであろう．ネーターは純粋でゆがみのない天真爛漫な人柄であって，学生の指導にも熱心であったようである．The Noether Boys がネーターとの会話から実に多くのことを学んだ様子が，テントの書物からうかがえる．講義も何かをたずさえて行うのではなく，彼女の中から自然にあふれ出る思考を大変な早口で語り，板書もたちまち消していくといった風であったという．講義を聴く者もあらたな世界が創始される場面に立ち会うわけで，大変な興奮のうちに過ごしたようである．現在の日本の大学の実情を顧みるに，何ともうらやましい話ではないか．

現代可換環論はネーター環の理論である．20世紀の最後の30年間は，コーエン・マコーレイ (Cohen–Macaulay) 環の理論であったといってもよいであろう．ネーター環でない可換環（例えば，代数的整数の全体は可換環であるが，ネーター環ではない）の理論に価値がないというつもりは全くない．ネーター環でない可換環の理論にも驚くべき深い成果があり，よくもまあここまで考えたという仕事に出合った経験が何回もある．しかしながらネーター環の理論が大きく発展した理由はやはり，モデルが豊富であること，応用したい場面では大抵の可換環がネーター環であるということにあると思われる．

ネーター環の場合，鍵は次の事実にある．

定理 2. R はネーター環とする．このとき

(1) 環 R のイデアル I についての剰余類環 R/I はすべてネーター環である．

(2) （ヒルベルトの基底定理）多項式環

$$R[X_1,X_2,\dots,X_n]$$

はネーター環である．

(3) S を R 内の積閉集合とすると，局所化 $S^{-1}R$ はネーター環である．

(4) I を R のイデアルとすると，環 R の I-進位相についての完備化 $\widehat{R}$ はネーター環である．

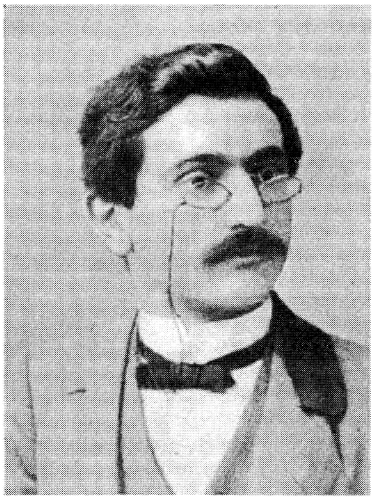
証明は例えば Atiyah–Macdonald[1)]を参照されたい．体や整数環 $\mathbb{Z}$ はたしかにネーター環であるから，与えられた環から新しく環をつくる標準的な操作 (1), (2), (3), (4) を組み合わせることによって，豊富に大量のネーター環が構成される．このような対象すべてに対して，ネーター環について正しいすべての命題が真となるのである．ネーターの目に見え，当時の人々には必ずしも十分には理解されなかったかもしれない抽象化とは，このような営みのことである．現代可換環論は多岐に渡っているし，ネーターの時代と大きく違う要素の一つとして計算機の発展があり，再び非常に具体的な数学に回帰しつつあるようにも見えるが，そのすべてが「本質を抽象する」というネーターの思想から出発し，これを基盤にしていることは，記憶に値する事実であろう．

可換環論におけるネーター自身の仕事（彼女はこれを「可換環論」であるとは認識していなかったであろうが）は，有限群の不変式論における業績が名高い．ここでは，ネーターの名が残っているイデアルの準素分解の話を紹介しよう．

まず定義を思い出すことから始めよう．

定義 3. $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}$ は可換環 R 内のイデアルであって，$\mathfrak{q},\mathfrak{p},\mathfrak{m}\neq R$ なるものとする．

(1) 次の条件を満たされるとき，$\mathfrak{m}$ は R の極大イデアルであるという：$\mathfrak{m}\subseteq I\subsetneq R$ となる R のイデアル I は，$I=\mathfrak{m}$ のみである．



エマヌエル ラスカー．

(2) 次の条件が満たされるとき，$\mathfrak{p}$ は R の素イデアルであるという：$a,b\in R$ について，$ab\in\mathfrak{p}$ ならば，$a\in\mathfrak{p}$ かまたは $b\in\mathfrak{p}$ が成り立つ．

(3) 次の条件が満たされるとき，$\mathfrak{q}$ は R の準素イデアルであるという：$a,b\in R$ について，$ab\in\mathfrak{q}$ ならば，$a\in\mathfrak{q}$ であるかまたは b のある冪 b^n $(n>0)$ をとると $b^n\in\mathfrak{q}$ となる．

定理 1 の条件 (3) は，ネーター環 R 内のどのようなイデアル I $(\neq R)$ に対しても，適当な極大イデアル $\mathfrak{m}$ があって $I\subseteq\mathfrak{m}$ が成り立つことを保証している．すぐに確かめることができるが，極大イデアルは素イデアルである．また，素イデアルは準素イデアルであり，準素イデアル $\mathfrak{q}$ に対して $\sqrt{\mathfrak{q}}=\{a\in R\mid a^n\in\mathfrak{q}\text{ for some }n>0\}$ は素イデアルである．素イデアルの概念は素数の概念の拡張である．実際，$2\leq a\in\mathbb{Z}$ とするとき，イデアル (a) が $\mathbb{Z}$ の素イデアルということと，a が素数であることは同値である．また $2\leq p\in\mathbb{Z}$ を素数とすると，任意の整数 $n>0$ に対して (p^n) は $\mathbb{Z}$ の準素イデアルであって，$\sqrt{(p^n)}=(p)$ となる．そしてすべての整数 $2\leq n\in\mathbb{Z}$ は素数の積として唯一通りに因数分解されるが，この事実を抽象化した次の定理は，ラスカー–ネーターの分解定理と呼ばれている．

定理 4.[9, 10] I $(\neq R)$ をネーター環 R のイデアルとすると，R 内に有限個の準素イデアル $\mathfrak{q}_1,\mathfrak{q}_2,\ldots,\mathfrak{q}_n$ を見つけて

$$I=\mathfrak{q}_1\cap\mathfrak{q}_2\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_n$$

という形に表すことができる．この分解は次の 2 条件を満たすように選びなおすことができる．

(1) $\sqrt{\mathfrak{q}_1},\sqrt{\mathfrak{q}_2},\ldots,\sqrt{\mathfrak{q}_n}$ は，どの 2 つも異なる．

(2) いかなる $1\leq i\leq n$ についても，$\mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\overset{\vee}{\mathfrak{q}_i}\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_n\neq I$ である．

このとき，環 R の素イデアルの集合

$$\{\sqrt{\mathfrak{q}_1},\sqrt{\mathfrak{q}_2},\ldots,\sqrt{\mathfrak{q}_n}\}$$

は，上の条件 (1), (2) を満たすような分解の取り方の多様性を乗り越えて，イデアル I に対して一意的に定まる．

証明は Atiyah–Macdonald[1] を参照されたい．

この定理はネーター環論の根底にあり，すべての理論が最終的にはここに帰着し還元される．現代的には，N. ブルバキー[2, Chapter IV] により，加群の随伴素イデアルの理論として，端麗な形に書き直されている．

さて，本稿を閉じる前に，ネーター以後の可換環論の発展をぜひとも概観しておきたい．

可換環論は，20 世紀半ばに J.-P. セールによってホモロジー代数学が導入されて以降，そのパラダイムに一大変化が起こり，飛躍的な発展を遂げた．グロータンディックによる代数幾何学抽象化の嵐の中で，可換環をある空間上で体に値を持つ函数の集合と捉えることによって，可換環論が幾何学の一部（局所理論）であることが認識されて以降は，さらに大きな発展があった．

ホモロジー代数学は，環上の加群論とこれを理解するための線形代数よりなる．セールは，当時懸案であった環構造の問題に対し，新しい方法を導入することによって見事な解答を与えた．この問いには，今日でもセールの方法の他には，解答がないはずである．

少し説明をしよう．ネーター環 R は，ただ一つしか極大イデアルを含まないとき局所環であるという．幾何学的には，多様体上の点における芽に対応する環である．ネーター環 R をその素イデアル P で局所化すると，得られた環 $R_P = S^{-1}R$（ただし $S = R \setminus P$）は，必ず局所環となる．

R は局所環，$\mathfrak{m}$ をその極大イデアルとする．環 R に対し，R 内に素イデアルの列 $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \ldots \subsetneq P_n$ が存在するような整数 $n \geq 0$ の最大値を $\dim R$ とおき，環 R の次元という．局所環の次元は有限であり，極大イデアルを生成するに必要な元の個数の最小値以下である．局所環 R はその極大イデアル $\mathfrak{m}$ が次元 $\dim R$ に等しい個数の元で生成されるとき，正則であるという．多様体上の点でいえば，正則局所環は非特異点に対応し，環構造は非常に整ったものとなる．例えば，体 k 上の形式的冪級数環 $k[[X_1, X_2, \ldots, X_n]]$ が典型的な正則局所環で，次元は n である．

1950年代，人々の関心を集めた大きな問題の一つに，与えられた正則局所環をその素イデアルで局所化して得られる局所環は必ず正則であるかという問いがあった．セールを除く当時の人々は，この問題を徹底的な内部構造解析を通して解決しようとしたが，セールは環 R 上の線形代数すなわちホモロジー代数学という，環の内部構造を外部世界に投影してこれを理解しようとする新しい方法によって，1955年にこの問題を肯定的に解決した．セールの定理は，与えられた局所環が正則であるための必要十分条件は環 R の剰余体 $R/\mathfrak{m}$ の射影次元が有限であることであり，このときいかなる R–加群もその射影次元は高々 $\dim R$ であることを示している．要するに環 R の大域次元が有限ということである．

透明なセールの議論は結果の素晴らしさにもまして，環構造論を決定的に変化させる力を持っていた．内部構造を理解するには外部表現を知る必要がある．可換環の表現論の誕生である．

セール以降の1960年代は，代数学の栄光の時代であった．H. バス，M. アオスランダー，D. リース，永田雅宣といった巨人たちが光り輝いた時代の後，20世紀最後の30年間，可換環論はコーエン・マコーレイ環[3]の理論として，代数幾何学や組み合わせ論，不変式論，特異点論など他分野との関わりの中で成熟して行ったと考えられる．M. ホックスターや C. フネッケ[8]による正標数の可換環論の展開と代数幾何学との関わりも見逃すことはできない．今日では様々な分野で多彩な役割を果たし，活動範囲も大きくなっている．この発展に松村英之[6]をはじめとする日本の研究者たちが果たした役割は決して小さくないのである．

参考文献

1) M.F. Atiyah and I.G. MacDonald, "Introduction to Commutative Algebra", Addison-Wesley Publishing Company, 1969.
2) N. Bourbaki, Elements of Mathematics, "Commutative Algebra", Addison-Wesley Publishing Company, 1972.
3) W. Bruns and J. Herzog, "Cohen–Macaulay Rings", Cambridge University Press, 1993.
4) D. Eisenbud, "Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry", GTM **150**, Springer Verlag, 1995.
5) レン・フィッシャー著，林一訳，『魂の重さは何グラム？』新潮文庫，2009.
6) 松村英之，『復刊 可換環論』，共立出版，2000.
7) D. Hilbert, Ueber die Theorie der algebraischen Formen, *Math. Ann.*, **36** (1890), 473–534.
8) C. Huneke and I. Swanson, "Integral Closure of Ideals, Rings, and Modules", London Mathematical Society Lecture Note Series **336**, Cambridge Univ. Press, 2008.
9) E. Lasker, Zur Theorie der Moduln und Ideale, *Math. Ann.*, **60** (1905) 19–116.
10) E. Noether, Idealtheorie in Ringbereichen, *Math. Ann.*, **83** (1921), 24–66.
11) M.B.W. Tent, Emmy Noether: "The Mother of Modern Algebra", A K Peters, Ltd. 2008.
12) B.L. van der Waerden, Modern Algebra. Vol.I. Translated from the second revised German edition by Fred Blum, Frederick Ungar Publishing Company, 1949.
13) O. Zariski and P. Samuel, "Commutative Algebra. Vol.I with the cooperation of I.S. Cohen. Corrected reprinting of the 1958 edition", GTM **28**, Springer-Verlag, 1975.
14) O. Zariski and P. Samuel, "Commutative Algebra. Vol.II. Reprint of the 1960 edition", GTM **29**, Springer-Verlag, 1975.

（ごとう・しろう，明治大学理工学部）

現象から方程式を創り出す

リレー連載

第18回 —立式で鍛える論理的思考法—

アインシュタイン方程式

相対論と重力

佐藤　文隆

1. アインシュタインの名のつく学術用語

最近，“アインシュタイン”で学術用語を検索すると夥しい数の用語が現れる．以下にある程度定着したものを列記する（アインシュタインをEで略記する）．

揺らぎ・拡散関係

Eの関係（方程式），Eの粘性公式，ストークス・E方程式，

特殊相対論・一般相対論

E質量エネルギー関係，Eの場の方程式，E・ヒルベルト作用，E・リング，Eの重力方程式，Eの静的宇宙，E・ドジッターモデル，E・ローゼンブリッジ，E・テンソル，Eの縮約

前期量子論・量子統計

Eの光電効果関係，比熱のE公式，ボーズ・E凝縮（統計），E・ドハース効果，E係数AとB，Eの光化学当量の法則，EBK法（Einstein–Brilloun–Keller）

その他，**量子力学への不満**を表明したEの箱，EPR（Einstein–Rosen–Podolsky）パラドックスなどがある．

“アインシュタイン方程式”には特殊相対論の$E=mc^2$，重力場方程式，拡散係数の式の3つがある．近年，ハイテク分野でのアインシュタインの名の浸透は著しく，半導体での電荷密度の拡散を記述する関係式とレーザーでので自発遷移係数Aと誘導遷移係数B（アインシュタインのAとB）が特に有名である．またアインシュタインの論文で引用度一番はEPR論文のようである．

もちろん，筆者に割り当てられたのは重力場の方程式のことであろうと思うが，物理学の世界でのアインシュタインの位置の変動を注意深く認識する必要がある．

2.「一般」的な相対論

アインシュタインが重力方程式を構築した時期とその後の百年近くになる現時点とでは力の理論の知見が大きく変わった．ゲージ場によって「四つの力」の統一的原理が得られたことである．本解説ではこの現代的視点から落下傘的に降りる視点は取らず，むしろ「一般」的な相対論という名称に込められているある種の混乱を解説する．

特殊相対論には直線直角のデカルト座標系が似合う．ミンコフスキー時空の空間部分は球座標の様な曲線座標で書いてもいいが，ローレンツ変換となると曲線座標は似合わない．“似合う”とか，“似合わない”とか，厳密さに欠ける表現だが，座標系とは任意に持ち込む表現法だという立場を貫

けばローレンツ変換を曲線座標系で表現してもいいはずである．空間の点と座標値（数字の組）を一対一に対応させるのが座標系であるという視点に立てば，どの座標系も対等のはずである．この意味での「一般」の座標系とローレンツ変換の「特殊」座標変換の関係にしっくりしないものがある．

ローレンツ変換とは時空という物理的実体がもつ対称性という法則性である．一般座標系のような表現手法の話ではない．1905 年の論文「運動物体の電磁気学」には対称性の視点はない．対称性という数学原理でこの法則を見る視点はミンコフスキーやプランクから始まる．1915 年頃，エミリー・ネーターが解析力学の中で「対称性と保存則」の関係を明らかにした．量子力学の成立を待って，ワイルやウィグナーが群論を物理学に持ち込んで新たな分野を拓いた．

すなわち，対称性を表現するために導入される時空の対称群と座標系による点の座標値による表現法とは異なるものである．前者は**対称群に対する不変性**（invariance）であり，後者は**一般座標変換**（diffeomorphism）**に対して共変的**（covariant）な形式で表現されているということである．前者では変換は不変性を維持する特殊なものに限られるが，後者では任意の変換に対して共変性が維持されるという意味である．

ローレンツ群のイメージ：“回転” か，“等速” か

ローレンツ群とは 4 次元ミンコフスキー時空の時間と空間にまたがる方向での一種の “回転” 変換に相当する．回転により，普通の空間ではユーグリッド長さ Δl が不変だが，ミンコフスキー空間では $c^2\Delta t^2 - \Delta l^2 = $ 不変 である．

$$
\begin{aligned}
x' &= \cosh\theta x + \sinh\theta ct, \\
ct' &= \sinh\theta x + \cosh\theta ct.
\end{aligned} \tag{1}
$$

これは通常の回転での $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ で，回転角度を虚数にした $\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$ が不変という意味での “回転” である．

こういうと “回転” 的だが，いま “角度” θ を

$$
\begin{aligned}
\cosh\theta &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \\
\sinh\theta &= \frac{v/c}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}
\end{aligned} \tag{2}
$$

によって v に置きかえると，“回転” でなく等速運動系の間の変換則であると解釈される．

ローレンツ変換を運動系間の変換であると解釈したとたんに，この変換を “等速” という「特殊」なものに限られていることが気になってくる．そしてこの意味での「特殊」が「特殊」相対論という名づけにつながる．“回転” イメージにしろ “等速” イメージにしろ，ローレンツ変換の「特殊」とは一般座標変換の範疇に入らない線形変換に限られているということである．しかし「一般」相対論の「一般」はこの「特殊」を「一般」にしたものではない．一般相対論の中でもローレンツ変換は生き続けるのだから．ローレンツ変換の線形変換という「特殊」な変換則が，一般座標変換の共変性に飲み込まれてしまうわけではないのである．

3. 一般相対論の数学

数学者フェリックス・クラインが 1872 年に提唱したエルランゲン・プログラムは「幾何学とは変換群の下で不変な性質を研究する学問である」というものである．これは 19 世紀初めの球面幾何や射影幾何などの非ユークリッド幾何学の誕生を受けて，ユークリッド幾何学に限られない，新たな幾何学の定義に応えたものである．ユークリッド幾何とは合同変換で不変な性質をもつ空間の幾何学である．こうした変換群によって空間を規定するという言い方でいえば，ローレンツ群で規定される空間はアフィン空間の一種である．そこでは，合同ではなく，平行の概念が維持される．

この観点でリーマン幾何でのこの対称性は無限小線素 $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ を不変にする等長変換群だと考えられたが，その後，エリー・カルタンによりアフィン変換と一般座標変換を区別した視点が確立した．一般座標変換に対する共変的な表

現を規定するのは可微分同相（diffeomorphism）な座標変換である．カルタンは異なる点での平行概念を表現する手段として接続係数の導入が必要であることを明らかにした．接続の概念は，当初，レビチビタによって，平行移動を表現する共変微分の定義によって導入されたが，可微分同相との区別が不鮮明であった．これを明確にしたのが20世紀中葉のカルタンである．

アインシュタインが，同級生の数学者マーセル・グロスマンと一緒に，リーマン幾何を使って一般相対論の定式化を始めた時期（1913年）は，“レビチビタ以後，カルタン以前”である．このために一般相対論の「一般」の命名に混乱がみられる．また素粒子相互作用の標準理論を可能にしたゲージ理論と同趣旨の構造であることが見えにくくなっている．一般相対論には言及していないが，非可換群の場合のゲージ理論を初めて提案したのはヤンとミルズである（1954年）．これとは独立にこの点を明確に提案したのが内山龍雄の重力場のゲージ理論である（1956年）．カルタンの接続の幾何学は一般相対論のゲージ理論的表現そのものであるが，この視点に立つと曲率以外の捩率などの新しい自由度が数学的には増えるので，一般相対論の拡張理論が展開されることになる．

ここで数学の発展に触れたのは，一般相対論を学習する際に立ちはだかる難しさの大半が物理学とは無関係な数学だからである．しかも，それが他の物理学には登場しない微分幾何学という数学手法である．このため，この微分幾何学に付随する“数学の森”をあたかもアインシュタインが築いたかのように思う．これは大いなる錯覚であって，“数学の森”に登場する道具立てはリーマン，レビチビタ，クリストッフェル，カルタンなどによるものを利用しているに過ぎないのである．

4. 一般相対論と物理的動機

“現象から方程式を創り出す”の視点からいうと，一般相対論には新しい法則性を必要としている現象というものは存在しなかった．あったのは相対論的な重力理論を建設するという理論的動機である．特殊相対論の1905年の段階で力の法則は電磁気学と重力であった．そして電磁気学はローレンツ群に対して不変な理論であったから，重力の理論も相対論的に改編されるべきだと考えるのは当然であった．なぜなら，電磁気学がローレンツ群の対称性を持つのは時空が持つ対称性に由来するものであり，時空に存在するものすべてが最低限満たさなければならない基準だからである．

アインシュタインが手掛かりとしたのは次のような事項である．

1. 重力質量と慣性質量の等価原理．
2. 加速度運動系による無重力系．
3. 曲がった空間の実在可能性．
4. マッハがいう物質で決まる慣性系．
5. リーマン幾何という数学．

当時の物理学界では，等価原理について関心がもたれており，物質の種類によってこの比が変わりないことを確かめる実験がエトヴァスによってなされていた．アインシュタインが1911年に一般相対論建設にスタートした当初からこれを前提にした．次にいわゆる落下するエレベーターと無重力系という思考実験に進んだ．重力加速度 g である座標系 (x, y) に対して，

$$x = x',\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + y' \tag{3}$$

の座標変換の関係にある無重力系 (x', y') を導入する．すると x 方向に進行する光子の方程式は

$$x' = ct + a, \quad y' = b \tag{4}$$

である．したがって軌道は

$$y = -\frac{1}{2}\frac{g}{c^2}(x-a)^2 + b \tag{5}$$

という放物線で与えられる．

当時，天文学者のカール・シュバルツシルドは宇宙空間がユークリッド空間でない可能性を論じている．数学の世界での非ユークリッド幾何が自然界での問題に影響していた．曲率があったとしても，曲率半径はある長さ以上であるといった推定を天文学からしている．さらに，エルンスト・

マッハはニュートン力学の中で潜む慣性系（非回転系）の絶対性を実証主義的な視点で批判した．いわゆる「バケツの思考実験」により，慣性系は宇宙の物質の運動状態と相対的に決まっているとするマッハ原理を打ち出した．宇宙の物質と一緒に回転するバケツ内の水面は遠心力を受けずに平坦であろうと喝破した．これらの論議は，時期も動機も，アインシュタインの建設期と直結してるわけではないが，当時の科学界でひろく話題なっていることであった．こうして物質の存在を源として空間の幾何学が影響を受けるという可能性は漠然と浮かび上がっていたのである．こうした方向性が定まったとしても，直ぐに数式が書ける具体性が欠けている．ここでリーマン幾何に通じていたグロスマンとの共同が始まる．

5. リーマン幾何と運動方程式

建設は運動方程式から場の方程式に進むが，何れの場合も最小作用原理を物理学の原理としている．すなわち，ラグランジアンを与えてオイラー・ラグランジュ方程式から運動方程式や場の方程式が導かれる．曲線に沿ったパラメータを τ とし，$x^\mu(\tau)$ で与えられる曲線の 2 点間を結ぶ距離は

$$s=\int_A^B \sqrt{g_\tau \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}\,d\tau \qquad (6)$$

である．最小作用原理は $\delta s=0$ だから，

$$L=\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \qquad (7)$$

をラグランジアンとして，次のオイラー・ラグランジュ方程式で与えられる．

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\sigma}\right)-\frac{\partial L}{\partial x^\sigma}=0. \qquad (8)$$

これに上記の L を代入すると

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(g_{\sigma\nu}\dot{x}^\nu+g_{\mu\sigma}\dot{x}^\mu\right)-g_{\mu\nu,\sigma}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\\ &=g_{\sigma\nu}\ddot{x}^\nu+g_{\mu\sigma}\ddot{x}^\mu+g_{\sigma\nu,\mu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\\ &\quad+g_{\mu\sigma,\nu}\dot{x}^\nu\dot{x}^\mu-g_{\mu\nu,\sigma}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu=0. \qquad (9)\end{aligned}$$

$g^{\lambda\sigma}$ をかけて，σ について和をとれば

$$\ddot{x}^\lambda+C^\lambda_{\mu\nu}\dot{x}^\nu\dot{x}^\mu=0, \qquad (10)$$

$$C^\lambda_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}\left(g_{\sigma\nu,\mu}+g_{\mu\sigma,\nu}-g_{\mu\nu,\sigma}\right) \qquad (11)$$

という測地線の方程式が得られる．$C^\lambda_{\mu\nu}$ は**クリストッフェル記号**と呼ばれる．ここで弱い重力の近似，$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}$ で $|h_{\mu\nu}|\ll 1$ と遅い速度の近似，$|\dot{x}^0|\gg|\dot{x}^i|$ をすると

$$\ddot{x}^i+C^i_{00}(\dot{x}^0)^2\approx 0,\quad \ddot{x}^0\approx 0. \qquad (12)$$

ここで $h_{00}=2\phi/c^2$, $x^0=ct=\tau$ にとれば

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}=-\frac{\partial\phi}{\partial x^i} \qquad (13)$$

という運動方程式になるから，ϕ は重力ポテンシャルであることが分かる．

6. リーマン幾何と接続係数

時空の各点での四元ベクトル基底を $\boldsymbol{e}_a$ としてベクトルを $\boldsymbol{V}=V^a\boldsymbol{e}_a$ と書けば，近傍の点でのベクトルとの差は

$$\delta\boldsymbol{V}=\delta V^a\boldsymbol{e}_a+V^a\delta\boldsymbol{e}_a \qquad (14)$$

のように基底の変化と成分の変化から成る．基底の変化もベクトルだから，**接続係数** Γ を導入して

$$\delta\boldsymbol{e}_a=\Gamma^b_{a\lambda}\boldsymbol{e}_b\delta x^\lambda \qquad (15)$$

と書くことができる．平行移動とは $\delta_{||}\boldsymbol{V}=0$ のことだから，任意の接続係数の導入に対して次の式で決まる成分の変化が要請される．

$$\delta_{||}\boldsymbol{V}=\left(\frac{\partial V^a}{\partial x^\lambda}\right)_{||}\delta x^\lambda\boldsymbol{e}_a+V^a\Gamma^b_{a\lambda}\boldsymbol{e}_b\delta x^\lambda=0$$

基底の変化に伴う成分の変化の分を差し引いた**共変微分**（$;\lambda$）を次のように定義する．

$$V^a_{;\lambda}=\frac{\partial V^a}{\partial x^\lambda}-\left(\frac{\partial V^a}{\partial x^\lambda}\right)_{||} \qquad (16)$$

$$=\frac{\partial V^a}{\partial x^\lambda}+\Gamma^a_{b\lambda}V^b. \qquad (17)$$

テンソルの共変微分も同様に定義される．ここで各点での座標軸に対する接線方向に基底をとれば，添え字を座標のと同じものを使って $\boldsymbol{e}_\mu$ と書ける．その上で計量テンソル $g^{\mu\nu}$ の共変微分がゼロであるとすれば

$$g^{\mu\nu}_{;\sigma}=g^{\mu\nu}_{,\lambda}+\Gamma^\mu_{\sigma\lambda}g^{\sigma\nu}+\Gamma^\nu_{\tau\sigma}g^{\mu\tau}=0. \quad (18)$$

$g^{\mu\sigma}g_{\sigma\nu}=\delta^{\mu}_{\nu}$ を使えば，上式から

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}=C^{\lambda}_{\mu\nu} \tag{19}$$

となる．したがって，$\dot{x}^{\mu}$ を成分とするベクトルに対して，$\dot{x}^{\sigma}\dot{x}^{\lambda}_{;\sigma}=0$ は測地線方程式となる．重力はこれに組み込まれているが，重力以外の力があれば運動方程式は $\dot{x}^{\sigma}\dot{x}^{\lambda}_{;\sigma}=f^{\lambda}/m$ となる．

7. リーマン幾何と場の方程式

ラグランジアンから場の方程式を導く過程を電磁場の場合に見てみる．ゲージ場は A_{μ} であり，電場と磁場はその一階微分 $F_{\mu\nu}$ で与えられる．場の方程式とは "運動方程式" のことであり，それはゲージ場の二階微分で与えられるマックスウェル方程式群である．ラグランジアンはローレンツ変換に対する不変性の要請からスカラーである $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ を持ってきて，

$$I=\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}dtdxdydz. \tag{20}$$

これの δA_{μ} に関する変分でマックスウェル方程式は与えられる．重力との対応関係は

$$A_{\mu}\to g_{\mu\nu},\quad F_{\mu\nu}\to\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} \tag{21}$$

であるから，ラグランジアンは $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ の二乗で与えられると考えられる．

重力の作用積分の場合はスカラー性だけでなく可微分同相の要請がある．このために体積要素が，$g\equiv\det|g_{\mu\nu}|$ として，

$$dx^0dx^1dx^2dx^3\to\sqrt{-g}dx^0dx^1dx^2dx^3$$

の置き換えが必要である．またスカラーとしてはスカラー曲率 R を持ってきて，作用積分は

$$I=\int R\sqrt{-g}dx^0dx^1dx^2dx^3+\kappa\int L\sqrt{-g}dx^0dx^1dx^2dx^3 \tag{22}$$

である．L は源となる物質場のラグランジアンである．

ここで曲率は，$R=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}=g^{\mu\nu}R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}$,

$$R^{\rho}_{\lambda\mu\nu}=\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu,\nu}-\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu,\mu}+\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu}-\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\mu} \tag{23}$$

であるから，ラグランジアンは「$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ の二乗」という要請を満たしていないようにみえる．しかしここで作用積分には全微分の不定性があることに注意する必要がある．実際，$G=\Gamma\Gamma-\Gamma\Gamma$ として

$$R\sqrt{-g}=D^{\nu}_{,\nu}-G \tag{24}$$

のように Γ の一乗項は全微分と Γ 二乗項に書き換えることができて，ラグランジアンの実質は Γ について二乗項だけになる（煩雑さを避けるため Γ の添字を省く）．

また物質項からは

$$T^{\mu\nu}=-\frac{2}{\sqrt{-g}}\left[\frac{\partial\sqrt{-g}L}{\partial g_{\mu\nu}}-\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial\sqrt{-g}L}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}}\right],$$

あるいは L が $g_{\mu\nu,\lambda}$ を含まなければ

$$T^{\mu\nu}=-\frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu}}-Lg^{\mu\nu} \tag{25}$$

としてエネルギー運動量テンソルが導かれる．

こうして全体の作用積分の $\delta g_{\mu\nu}$ に関する変分から運動方程式として

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=-\kappa T_{\mu\nu} \tag{26}$$

というアインシュタイン方程式が導かれる．弱い重力の近似でこの方程式がニュートンのポテンシャル ϕ を決めるポワッソン方程式

$$\nabla^2\phi=-4\pi G\rho \tag{27}$$

になるという条件から定数 κ は決められる．

ラグランジアンの選び方に確定的でない印象をうけるが，結果から逆に考えるとこれが次のような意味で確固たる基礎があることが分かる．それは，曲率テンソルが恒等的に満たすビアンキの関係（一般的には**ヤコビの恒等式**）から

$$\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\right)^{;\mu}=0 \tag{28}$$

が導かれることから，アインシュタイン方程式はエネルギー運動量テンソルの保存則

$$(T_{\mu\nu})^{;\mu}=0 \tag{29}$$

を意味するのである．

8. ラグランジアンは計算に便利

若者は困難なことに挑戦しようとするが，それが無意味なことがしばしばある．一部の者は添え字が繁茂する一般相対論の“数学の森に”神秘さを感じて挑戦する．しかしこれは，ベクトルや微分形式のように，表現法が成熟しておらず下手なだけなのである．筆者は，黒板に数式を書いての一般相対論の講義では，よく添え字を単にチョンチョンとドットを書いていた．「添え字に気を取られると，物理が分からなくなる」からである．

また一般相対論を眺めるだけでなく，実際に使う場面になると，現実には Γ や R を定義に戻って計算することはないのである．最近は数式計算のソフトを使って簡単に計算できる．手計算でもいろんな便法がある．筆者が使う便法を紹介する．

「使う立場」とは，必ずある種の対称性が要請されていることである．だから，座標を上手にとれば 10 個もある $g_{\mu\nu}$ のすべては登場させなくてよい．また残った $g_{\mu\nu}$ という関数の変数も限られる．

例えば，球対称，静的なら線素は動径座標を変数とする 2 つの関数で

$$ds^2 = e^{\mu}dt^2 - e^{\lambda}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

ここで測地線を導くラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}(e^{\nu}\dot{t}^2 - e^{\lambda}\dot{r}^2 - r^2\dot{\theta}^2 - r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2).$$

これを使って t, r, θ, ϕ についての 4 個のオイラー・ラグランジュ方程式を書き下す．例えば，

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{t}}\right) - \frac{\partial L}{\partial t} = e^{\nu}(\ddot{t} + \nu'\dot{t}\dot{r}) = 0, \quad (30)$$

$\nu'' = d\nu/dr$．これを測地線の方程式と比べれば

$$\Gamma^0_{01} = \frac{1}{2}\nu', \quad \text{それ以外の}\quad \Gamma^0_{\mu\nu} = 0 \qquad (31)$$

のように 10 個の Γ が一気に求められる．こうして 4 つの測地線方程式から 40 個の Γ を求めることができる．いまの問題では 40 個のうちゼロでないのは 9 個だけである．

9. 一般相対論とアインシュタイン

リーマン幾何を用いた一般相対論建設は，グロスマンと一緒に 1913 年にまず粒子の運動方程式から始まり，次に変分原理をもとに場の方程式に進む．1914 年当時，アインシュタインが書いた講演論文ではこの理論をアインシュタイン・グロスマン理論と呼んでいる．この 1914 年はアインシュタインがチューリッヒからベルリンに移ってグロスマンと分かれた年であり，また第一次大戦が勃発した年である．

1915 年には $R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$ の形をまず提案したが，1916 年に現在の形に修正された．しかし，真空（$T_{\mu\nu} = 0$）の場合は $R = 0$ なので，1915 年版は最終版と同じになる．実際，この 1915 年版の論文を見てブラックホール論議で有名なシュバルツシルド解が 1916 年には出版されている．なんとこれは戦場で書かれたもので，彼は戦傷がもとで同じ年の 5 月に戦地で亡くなっている．

この数学原理から導き出された理論がニュートン重力以上の効果を実験で確かめるまでは，これが物理理論なのかどうかはアインシュタインにとっても半信半疑であった．最初の効果は彗星の近日点移動である．すでに 19 世紀の天文学の観測より，ニュートン重力では説明できないこの効果が指摘されていた．定量的にもポスト・ニュートン効果でこれが説明されたことが自信を与えた．重力による，光りの軌跡の湾曲は，定性的な自由落下系の思考実験以来，天文学者のターゲットになっていた．一般相対論での湾曲角度は定量的には違っており，これが観測したのが英国の日食観測隊である．この結果は，第一次大戦終了直後の 1919 年に発表されて，戦後の社会現象としてアインシュタインを世界的なセレブにした．

参考文献

1)　佐藤文隆『相対論と宇宙論』サイエンス社，1981.

（さとう・ふみたか，甲南大学，京都大学名誉教授）

特　集（2011年8月号予告）

計算が拓く数学と物理の世界

自然を語る数値と計算

本体 952 円

特　集（2011年6月号）

物理イメージと数式表現

発想と思考の補助線をたどる

本体 952 円

編集後記

今回の特集はいかがでしたでしょうか．

私たちの身の周りでも自然科学に限らず，いろいろなことが〈隠れて〉います．しかも，物理と同じように〈隠れて〉いたものが物事の真相であったり，真相を知るのに必要なカギであったりします．様々な物事の真相を探ることは，あらゆる時代において，その人の知的好奇心を満たすために，常に存在しているように思いますが，時折，そういった〈隠れた〉物事が意図的に探しにくくなっている，と感じるのは私だけでしょうか．実際には真相は見えているのだけれども，情報が多すぎてどれが真相であるかわかりづらい，という見方もできそうです．

巻頭で白水先生が「視点を変えることで突破口は見えてくるかもしれない．しかし，それらに気がつくためには，センス，忍耐力，柔軟性，楽観主義などが重要になってくる」と仰っています．今回の特集を読むと〈隠れた〉真相を発見するヒントがあると思います．

皆さんも物事の〈隠れた〉真相を探ってみませんか？　(R)

数　理　科　学　7月号

2011年7月1日発行

数理科学編集部　　発行人 木下敏孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 ©　株式会社 **サイエンス社**　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁